



Title	2004年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2004
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/371">http://hdl.handle.net/2115/371</a>
Rights(URL)	<a href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learningobject
Note	当講義資料は著者のホームページ <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a> からもダウンロードできます。
Note(URL)	<a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	GraphTheory04_6.pdf (第6回講義ノート)



Instructions for use

# グラフ理論 配布資料 #6

教科書 pp. 60 ~ 66 の内容

担当：井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 5 月 24 日

## 演習問題 5 の解答例

1. 会場配置を連結グラフで表し, Fleury のアルゴリズムを用いることにより, 実際にオイラー小道を求めてみよう.

(1) 問題に与えられた表に従って a~g の会場を配置すると図 1 のようになる.

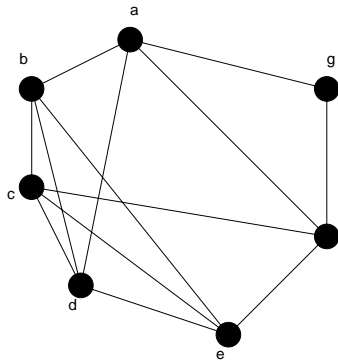


図 1: 各会場間の関係を表すグラフ.

(2) Fleury のアルゴリズムを用いることにより, 望むべき巡回路が得られる. 図 2 に描いた経路がオイラー小道を与える.

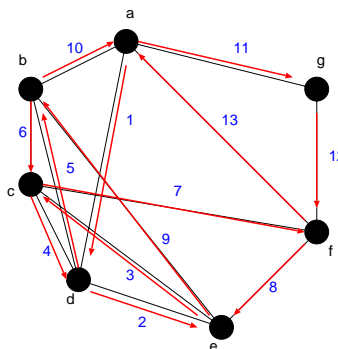


図 2: 求めるオイラー小道.

2.

- (1) 図3において, 点  $v = 4$  から出発したとして, 第一歩で  $v \rightarrow 1, v \rightarrow 3, v \rightarrow 5, v \rightarrow 7, v \rightarrow 8, v \rightarrow 9$  の異なる6通りのいずれを選ぶか …… 等々により, ことなる経路が得られる. 少々面倒であるが, 全て

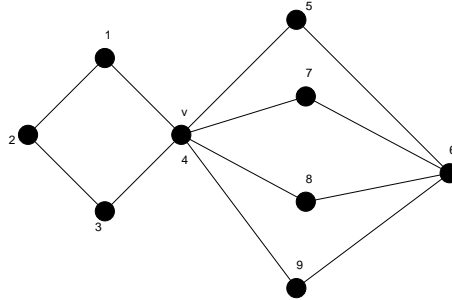


図 3: ここで任意周回可能性について考察するグラフ.

の可能な経路を書き下してみると (例えば, 一番目の下線が引かれた番号に対応する経路を図示すると図4 のようになる)

4123456748694 , 4123456749684  
 4123456847694 , 4123456849674  
 4123456947684 , 4123456948674  
 4123476548694 , 4123476549684  
 4123476845694 , 4123476849654  
 4123476945684 , 4123476948654  
 4123486547694 , 4123486549674  
 4123486745694 , 4123486749654  
 4123486945674 , 4123486947654  
 4123496547684 , 4123496548674  
 4123496745684 , 4123496748674  
 4123496845674 , 4123496847654

4321456748694 , 4123456749684  
 4321456847694 , 4123456849674  
 4321456947684 , 4123456948674  
 4321476548694 , 4123476549684  
 4321476845694 , 4123476849654  
 4321476945684 , 4123476948654  
 4321486547694 , 4123486549674

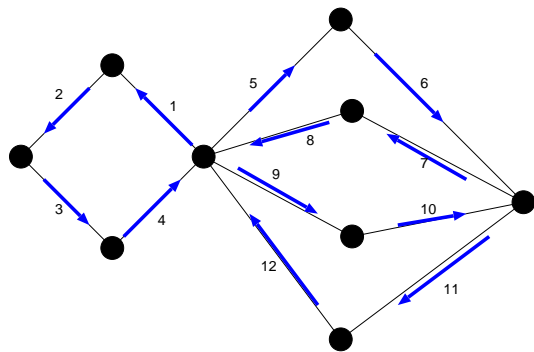


図 4: 下線が引かれた番号に対する具体的な経路.

4321486745694 , 4123486749654

4321486945674 , 4123486947654

4321496547684 , 4123496548674

4321496745684 , 4123496748674

4321496845674 , 4123496847654

4567486941234 , 4567486943214

4567496841234 , 4567496843124

4567412348694 , 4567412349684

4567432148694 , 4567432149684

4568476941234 , 4987476943214

4568496741234 , 4568496743214

4568412347694 , 4568412349674

4568432147694 , 4568432149674

4569476841234 , 4569476841234

4569486741234 , 4569486743214

4569412347684 , 4569412348674

4569432147684 , 4569432148674

4765486941234 , 4765486943214

4765496841234 , 4765496843124

4765412348694 , 4765412349684

4765432148694 , 4765432149684

4768456941234 , 4768456943214

4768496541234 , 4768496543214

4768412345694 , 4768412349654

4768432145694 , 4768432149654

4769456841234 , 4769456841234

4769486541234 , 4769486543214  
 4769412345684 , 4769412348654  
 4769432145684 , 4769432148654  
  
 4865476941234 , 4865476943214  
 4865496741234 , 4865496743124  
 4865412347694 , 4865412349674  
 4865432147694 , 4865432149674  
 4867456941234 , 4867456943214  
 4867496541234 , 4867496543214  
 4867412345694 , 4867412349654  
 4867432145694 , 4867432149654  
 4869456741234 , 4869456741234  
 4869476541234 , 4869476543214  
 4869412345674 , 4869412347654  
 4869432145674 , 4869432147654  
  
 4965476841234 , 4965476843214  
 4965486741234 , 4965486743124  
 4965412347684 , 4965412348674  
 4965432147684 , 4965432148674  
 4967456841234 , 4967456843214  
 4967486541234 , 4967486543214  
 4967412345684 , 4967412348654  
 4967432145684 , 4967432148654  
 4968456741234 , 4968456741234  
 4968476541234 , 4968476543214  
 4968412345674 , 4968412347654  
 4968432145674 , 4968432147654

以上, 全部で 144 通りの経路 (オイラー小道) が可能であり, 従って, このグラフは任意周回可能なグラフである.

- (2) 図 5 にその一例を与える. 図 5 のグラフは各点の次数が偶数であり, 定理 6.2 より, このグラフはオイラー・グラフであり, 確かにオイラー小道, 例えば,  $v \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow v \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 8 \rightarrow v$ .

しかし, 例えば図 5 の矢印に示した通りの進路を選ぶと, 図の点 8, 9, 10, 11 からなる「孤立した」成分が現れてしまう. 従って, 点 8 での進路の選択によっては, オイラー小道ができなくなる. この意味で, 図 5 に与えたグラフは任意周回不可能なグラフであると言える.

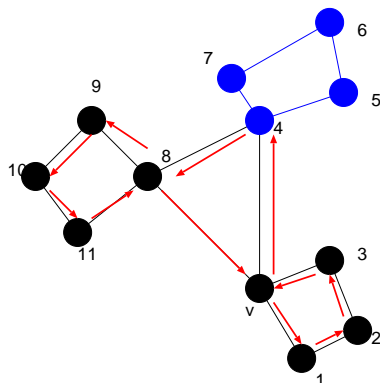


図 5: 任意周回が不可能であるグラフの一例.

さて、それでは、任意のオイラー・グラフが与えられたとして、そのグラフが任意周回可能か、あるいは、不可能であるか、という判定は一般にグラフのどのような特徴によって決まるのであろうか？ 図 6 に図 5 とは異なる任意周回不可能なグラフを 2 点挙げた。これらのグラフを考察すると、い

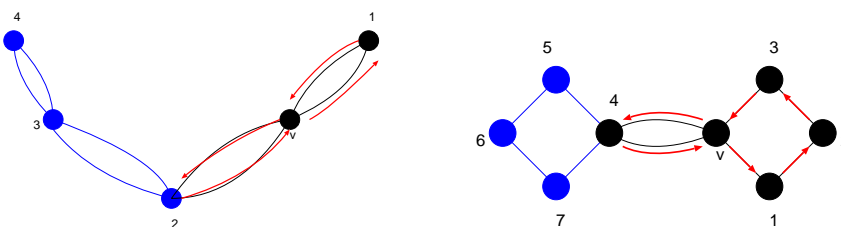


図 6: 上にあげたいずれのグラフも任意周回が不可能である。

れも次数が 4 以上の点が 2 点以上含まれることがわかる。もし、次数 4 以上の点が 2 点以上含まれるのであれば、図 6 の 2(左図) や 4 のように、この点において、孤立した成分を生成させてしまうような経路の取り方は常に可能である。従って、任意周回を可能にするためには、次数 4 以上の点を二つ以上含まないようなオイラー・グラフを用いることが肝要である。

(3) 展示場では、客が各展示場から任意に次の展示場を選び、しかも、各展示場を一回ずつまわって、最初の展示場に戻ってこれることが望ましい。従って、この性質を満たす任意周回可能グラフの各頂点に展示場を設置することが、適切な展示場の設計である。

3. 図 7 に答えを載せる。この図 7 は Ore の定理によるハミルトンであるための十分性は満たしてはいないが (例えば  $\deg(7) + \deg(10) = 3 + 4 = 7 < 11$  で満たさない)、図 7 にハミルトン閉路を示したように確かにハミルトンである。

レポート #4 に関するコメント

特に問題となる部分もなく、全般的に良くできていました。ところで、 $BC^T = 0 \pmod{2}$  を示す部分ですが、問題文に与えたグラフではなく、もちろん、一般の連結グラフに関して成立します。これを見るために

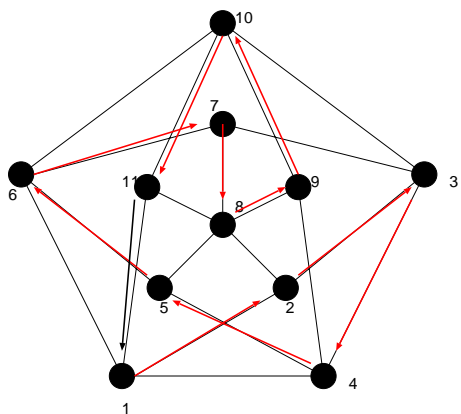


図 7: 求めるべきハミルトン閉路.

問題のグラフ  $G$  に対し, 再度  $BC^T$  の成分:

$$[BC^T]_{ij} = \sum_{k=1}^5 B_{ik}C_{jk} \quad (1)$$

を丁寧に書き下して考えてみることにしましょう.

$B_{ik}$  が「閉路  $L_i$  に含まれる辺  $k$  の本数」,  $C_{jk}$  が「カットセット  $C_j$  に含まれる辺  $k$  の本数」であることに注意し, 配布資料 #5 の図 1 における  $L_1, C_2$  に対する成分:  $[BC^T]_{12}$ , 及び,  $L_2, C_2$  に対する成分:  $[BC^T]_{22}$  を書き出してみると

$$\begin{aligned} [BC^T]_{12} &= B_{11}C_{21} + B_{12}C_{22} + B_{13}C_{23} + B_{14}C_{24} + B_{15}C_{25} \\ &= \underline{1 \times 1} + 1 \times 0 + 0 \times 0 + \underline{1 \times 1} + 0 \times 0 = 2 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} [BC^T]_{22} &= B_{21}C_{21} + B_{22}C_{22} + B_{23}C_{23} + B_{24}C_{24} + B_{25}C_{25} \\ &= 0 \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 0 = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

となりますので, これらの結果を考慮すれば, 成分の値 2, 及び, 0 の各々に対応して次の 2 通りの  $\{L_i, C_j\}$  の選び方がわかります.

- (A) カットセット  $C_j$  により分離されてできる 2 つの連結グラフのどちらにも閉路  $L_i$  が含まれない場合 (上の  $[BC^T]_{12}$  が該当するケース).
- (B) カットセット  $C_j$  により分離されてできる 2 つの連結グラフの一方に閉路  $L_i$  が含まれる場合 (上の  $[BC^T]_{22}$  が該当するケース).

(A) の場合, 分離された連結グラフの一方から他方を介し, 閉路  $L_i$  をつたって元に戻ってくる際には必ずカットセット  $C_j$  の中の 2 つの辺を通過しなければならず, この 2 つの辺は  $L_i$  と  $C_j$  の共通部分なので, その辺を  $l, m$  と呼ぶことにすれば,  $B_{il}C_{jl}$ , 及び,  $B_{im}C_{jm}$  のみが  $1 \times 1 = 1$  を与え, 結局,  $[BC^T]_{ij} = 2$  となります.

一方, (B) の場合には  $L_i$  と  $C_j$  の間に共通辺は存在しませんから, 任意の辺  $l$  に対して  $B_{il}C_{jl}$  は  $0 \times 1, 1 \times 0, 0 \times 0$  のいずれかであり, 結局  $[BC^T]_{ij} = 0$  が得られます.  $BC^T$  の成分は全て (A)(B) のケースのいずれかに当てはまりますから, 一般の連結グラフに対して  $BC^T = 0 \pmod{2}$  が成り立つこととなります.

## 7 木とその数え上げ

今回と次回の2回の講義では系統図や分子構造,あるいはコンピュータのファイルシステム等,多くの現象/対象を表現することのできる,簡単な構造ではあるが重要なグラフである「木」,及び,その数え上げ法(Cayleyの定理とその系)について学習する.なお,教科書 pp. 72-82 の「応用の追加」に関しては,情報工学演習 II(B)で演習問題を通じて見て行く予定なので,この講義では触れない.

### 7.1 木の基本的な性質

ここでいう「木」とは次のようにグラフ「林」の特別な場合として定義される.

林 (forest) : 閉路を含まないグラフ.

木 (tree) : 連結な林.

例えば,図8に載せたグラフが林であり,3つある成分のうちの各々が木である.

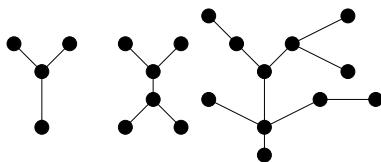


図 8: 林の例. 3つある成分の各々が木に相当する.

これらの木の基本的な性質は次の定理によりまとめられている.証明は教科書 p.61 を読んでもらうことにして,講義では説明しない.各命題を例に挙げた木に当てはめて確認されたい.

#### 定理 9.1

点  $n$  個からなるグラフ  $T$  を考えるとき, 次の各命題は同値である.

- (i)  $T$  は木である.
- (ii)  $T$  には閉路は無く, 辺が  $n - 1$  本ある.
- (iii)  $T$  は連結であり, 辺が  $n - 1$  本ある.
- (iv)  $T$  は連結であり, 全ての辺は「橋」である.
- (v)  $T$  の任意の2点を結ぶ道はちょうど1本である.
- (vi)  $T$  に閉路は無いが, 新しい辺をどのように付け加えても閉路ができ, しかも, 1個の閉路である.

ここで, 上の定理の命題 (ii)(iii) より, 林  $G$  の辺の数に関して次の系が得られる.

#### 系 9.2

林  $G$  には  $n$  個の点と  $k$  個の成分があるとする. このとき, 林  $G$  には  $n - k$  本の辺がある.

(証明)



閉路が無く連結だとすると,  $n - 1$  本の辺がある. これから辺を 1 本ずつ切断する操作を進めると

1 本辺を切断すると  $\Rightarrow$  成分数 2,  $n - 2$  本の辺

2 本辺を切断すると  $\Rightarrow$  成分数 3,  $n - 3$  本の辺

3 本辺を切断すると  $\Rightarrow$  成分数 4,  $n - 4$  本の辺

...

...

$k - 1$  本辺を切断すると  $\Rightarrow$  成分数  $k$ ,  $n - k$  本の辺

となる. (証明終わり).

さらに, 定理 9.1 の (ii) より木の端点数に関して次の系が得られる.

### 系 9.3

単点でない木は, 少なくとも 2 点の端点を含む.

(証明)

木  $T$ :  $V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ ,  $p \geq 2$ ,  $E(T) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$  とすると, 定理 9.1(ii) より

$$q = p - 1$$

であり, 辺の総数の 2 倍はグラフの次数に等しい (握手補題):

$$\sum_{i=1}^p v_i = 2q$$

から直ちに

$$\sum_{i=1}^p v_i = 2(p - 1)$$

が得られる. 従って, 木の端点が 0, 1 だとすると, 上式右辺が負またはゼロとなり, 点の数が 2 以上のグラフに対する次数の定義に反する. (証明終わり).

## 7.2 全域木

全域木 (spanning tree): 連結グラフ  $G$  に対し, 閉路が無くなるまで辺を除去して残るグラフ (図 9 参照).

これを一般化すると

全域林 (spanning forest):  $n$  個の点と  $m$  本の辺,  $k$  個の成分があるとして,  $G$  の各成分に対して, 閉路が無くなるまで辺を除去する操作を繰り返して得られるグラフ.

閉路階数 (cycle rank)  $\gamma(G)$ : 全域林を得るまでに切断しなければならない辺の本数.

$$\begin{aligned}\gamma(G) &= (G \text{ の辺数}) - (n \text{ 個の点, } k \text{ 成分からなる林 } G \text{ の辺数}) \\ &= m - (n - k) \text{ (系 9.2 より)} = m - n + k\end{aligned}$$

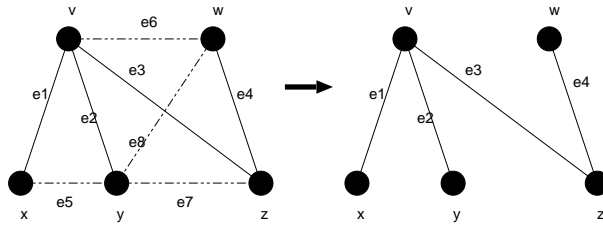


図 9: 連結グラフから生成された全域木の一例.

カットセット階数 (cutset rank)  $\xi(G)$  : 全域木の辺数

$$\xi(G) = n - k$$

**定理 9.3**

$T$  がグラフ  $G$  の全域林ならば

- (i)  $G$  の全てのカットセットは  $T$  と共通な辺を持つ.
- (ii)  $G$  の全ての閉路は  $T$  の補グラフと共通な辺を持つ.

(証明略) : 教科書 p. 63 を読んでおくこと.

### 7.3 基本閉路集合と基本カットセット集合

木  $T$  に関連した基本閉路集合 :  $T$  に含まれない  $G$  の任意の辺を一つ  $T$  に付加すると, 閉路が一つできる. この操作によりできる閉路の集合を基本閉路集合と呼ぶ (その一例として図 10 参照).

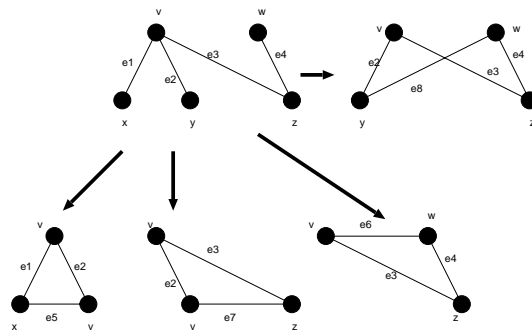


図 10: 基本閉路集合の一例.

木  $T$  に関連した基本カットセット集合 :  $T$  の各辺を除去して得られるカットセット集合 (その一例を図 11

に載せる).

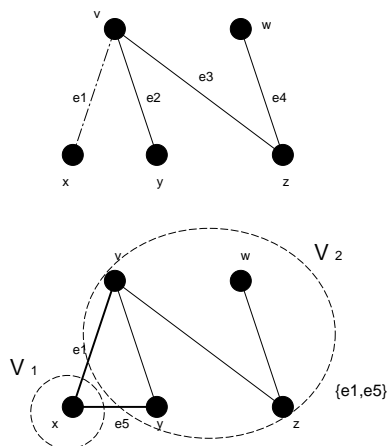


図 11: 基本カットセット集合の一例.

### 演習問題 6

$G$  が連結グラフであるとき,  $G$  の中心 (centre) とは次のような点  $v$  のことである:  $v$  と  $G$  の他点の間の距離の最大値ができるだけ小さい. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 端点を除去する操作を続けて行くことにより, 図 12 の木  $T$  の中心を求めよ.

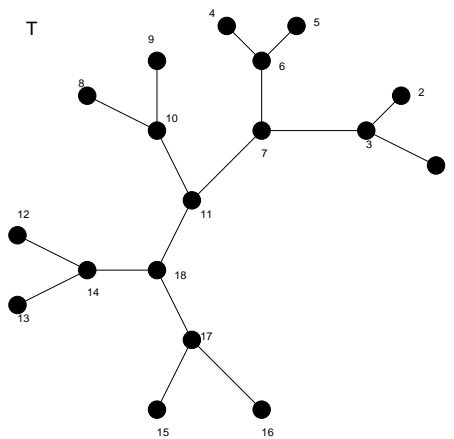


図 12: この木  $T$  の中心を考える.

- (2) どんな木でも中心は 1 つか 2 つであることを示せ.  
 (3) 木の中心が 2 つある場合, それらの 2 点は隣接していることを示せ.  
 (4) 7 点からなる木で, 中心が 1 つの木と, 2 つの木をそれぞれ一つずつ例示せよ.