グラフ理論 配布資料 #12 (教科書 pp. 156 〜 161 の内容)

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)

平成 17 年 7 月 11 日

目 次

演習問題 11 の解答例

(1) ハミルトン・グラフには全ての点を一度ずつ通って元に戻るハミルトン閉路が存在するので, この閉路に沿って各辺を向き付けすれば (この閉路に属さない辺への向き付けの仕方は任意), 任意の点 v をスタートし, 任意の点 w に到達できる道がこの閉路上にあることは明らか. 従って, ハミルトン・グラフは向き付け可能である.

(2) 完全グラフ K_n $(n \geq 3)$ の場合には任意の点 v の次数が $\deg(v) = n - 1$ であるから, Dirac の定理より, グラフ内の全ての点 v に対し $\deg(v) \geq n/2$ が成立するのでハミルトン閉路が存在するハミルトン・グラフである. 従って, (1) の結果より, 向き付け可能である. 具体的にはハミルトン閉路に属する辺をまずその向きに向き付けし, 残りの辺に任意に向き付けを行えばよい (図 187(左) 参照). 次に完

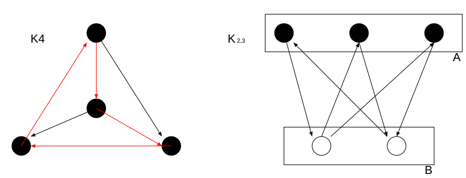

図 187: K_4 の向き付け (左) と $K_{2,3}$ の向き付け (右).

全二部グラフ $K_{r,s}$ $(r, s \geq 2)$ の場合には, 必ず全ての辺が ABAB という長さ 4 の閉路に含まれるので (A, B とはそれぞれの点がそのどちらかに含まれる 2 つのグループを指す), **定理 22・1**「連結グラフが向き付け可能であるための必要十分条件は, 各辺が少なくとも 1 つの閉路に含まれることである」より, 向き付けが可能であり, この順：ABAB に各辺に対し向き付けを行えば良い (図 187(右) 参照).

(3) 図 188 参照.

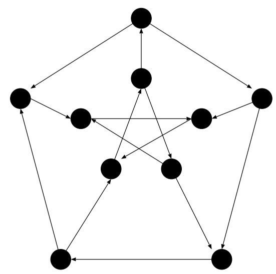

図 188: ピータースン・グラフの向き付け.

11.3 マルコフ連鎖

ここでは, 自然科学, 社会科学, 工学等, 様々な場面で用いられる「マルコフ連鎖」のグラフを用いた表現法について学ぶ.

1 次元酔歩：酔っ払いが各時刻で右左にそれぞれ確率 1/3, 1/2 で動き, 確率 1/6 で現在の位置に留まる. また, E_1, E_6 に到達するとその場を離れないとする (図 189 参照). この場合の酔っ払いの位置 $E_1, \cdots, E_6$ に

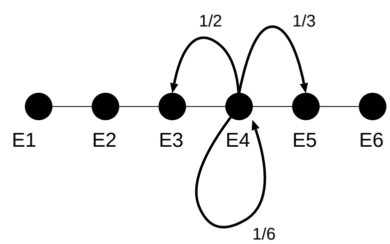

図 189: 1 次元酔歩の一例.

滞在する確率をを時間の関数として調べる.

酔っ払いの最初の位置を E_4, すなわち, $\boldsymbol{x} = (0,0,0,1,0,0)$ で酔っ払いの動きを指定する. ここで, ベクトル $\boldsymbol{x}$ の各成分 i は, 位置 E_i に酔っ払いがいる確率を表す. 従って, 1,2 分後にはそれぞれこの**状態ベクトル**は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &= \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 0\right) \\ \boldsymbol{x}_2 &= \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{13}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right) \end{aligned}$$

となる.

このような**状態ベクトル**を算出するために, **遷移行列 (transition matrix)**：$\boldsymbol{P} = (P_{ij})$ を導入すると便利である. この行列の ij 成分 P_{ij} は**遷移確率 (transition probability)** と呼ばれ, ある時刻から 1 分

後に, 酔っ払いが E_i から E_j に移動する確率を表す. 従って, 上の酔っ払いの例では

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる.

ここで, 酔っ払いのスタート地点での状態ベクトルを $\boldsymbol{x}_0 = (p_0^1, p_0^2, p_0^3, p_0^4, p_0^5, p_0^6)$ とし, それから 1 分後の状態ベクトルを $\boldsymbol{x}_1 = (p_1^1, p_1^2, p_1^3, p_1^4, p_1^5, p_1^6)$ と定めると

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{P} \tag{191}$$

なる関係が成り立つ. 具体的に成分で書き下すと

$$\begin{aligned}(p_1^1, p_1^2, p_1^3, p_1^4, p_1^5, p_1^6) &= (p_0^1, p_0^2, p_0^3, p_0^4, p_0^5, p_0^6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(p_0^1 + \frac{p_0^2}{2}, \frac{p_0^2}{6} + \frac{p_0^3}{2}, \frac{p_0^2}{3} + \frac{p_0^3}{6} + \frac{p_0^4}{2}, \frac{p_0^3}{3} + \frac{p_0^4}{6} + \frac{p_0^5}{2}, \frac{p_0^4}{3} + \frac{p_0^5}{6} + \frac{p_0^6}{2}, \frac{p_0^5}{6} + p_0^6\right) \end{aligned} \tag{192}$$

となる. ここで, 例えば

$$p_1^1 = p_0^1 + \frac{1}{2} p_0^2 \tag{193}$$

は $t = 0$ に E_1 にいた場合, 確率 1 で E_1 にとどまり, E_2 にいた場合, 確率 1/2 で E_1 に移ることを意味している.

例題 33

$\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ が遷移行列ならば, $\boldsymbol{PQ}$ も遷移行列であることを例を挙げて示せ. また, $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ の関連有効グラフと $\boldsymbol{PQ}$ の間の関係を例を挙げて説明せよ.

(解答例)

まず, 図 190 のような状態遷移グラフの遷移行列 $\boldsymbol{P}$ は

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{194}$$

となる. 一方, 図 191 に与えた状態遷移グラフに関する遷移行列 $\boldsymbol{Q}$ は

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{195}$$

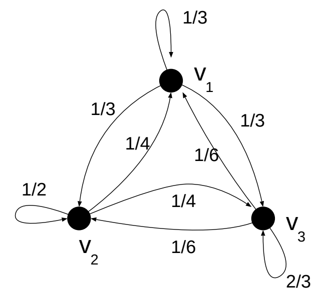

図 190: 遷移行列 $\boldsymbol{P}$ で与えられる有向グラフ.

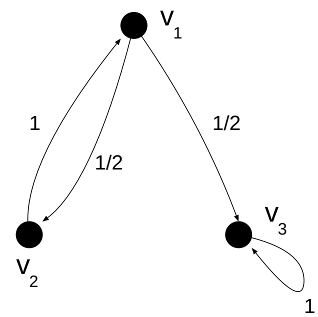

図 191: 遷移行列 $\boldsymbol{Q}$ で与えられる有向グラフ.

となる.

例えば, 時刻 $t=0$ で v_1, v_2, v_3 に「粒子」が居る確率を $p_{v_1}(0), p_{v_2}(0), p_{v_3}(0)$ とし, これを状態ベクトルとして $\vec{p}(0)=(p_{v_1}(0), p_{v_2}(0), p_{v_3}(0))$ と書くことにすると, 次の時刻 $t=1$ での状態ベクトル $\vec{p}(1)$ は

$$
\begin{aligned}
(p_{v_1}(1), p_{v_2}(1), p_{v_3}(1)) &= (p_{v_1}(0), p_{v_2}(0), p_{v_3}(0)) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{3}p_{v_1}(0)+\frac{1}{4}p_{v_2}(0)+\frac{1}{6}p_{v_3}(0), \frac{1}{3}p_{v_1}(0)+\frac{1}{2}p_{v_2}(0)+\frac{1}{6}p_{v_3}(0), \frac{1}{3}p_{v_1}(0)+\frac{1}{4}p_{v_2}(0)+\frac{2}{3}p_{v_3}(0)\right)
\end{aligned}
$$

となり, $t=0$ に粒子が v_1 に居たとすれば $p_{v_1}(0)=1, p_{v_2}(0)=p_{v_3}(0)=0$ であり, このとき, 1 秒後にそれぞれの点に粒子が移る確率 (存在確率) は

$$
\begin{aligned}
(p_{v_1}(1), p_{v_2}(1), p_{v_3}(1)) &= (1,0,0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \qquad (196)
\end{aligned}
$$

となる (図 190 参照).

ここで, 注意すべきなのは, 遷移行列においては各行の和は 1 になっていなければならないことである. これは各点から 1 秒後には必ず (現在居る点も含めた) 「どこか」に移動しなければならないからである.

さて, 行列の積 $\boldsymbol{PQ}$ を計算してみると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{PQ} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \qquad (197)
\end{aligned}
$$

となっており, 確かにこの行列 $\boldsymbol{PQ}$ の各行の和は 1 になっている. 従って, $\boldsymbol{PQ}$ は遷移行列である. この行列 $\boldsymbol{PQ}$ で表される状態遷移グラフを描くと図 192 のようになっている. $t=0$ から $t=1$ への 1 ステップ

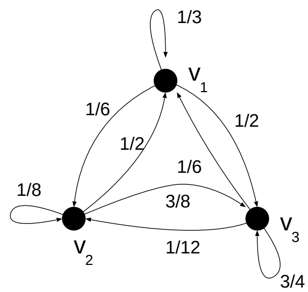

図 192: 遷移行列 $\boldsymbol{PQ}$ で与えられる有向グラフ.

で状態ベクトルは

$$
\begin{aligned}
(p_{v_1}(1), p_{v_2}(1), p_{v_3}(1)) &= (p_{v_1}(0), p_{v_2}(0), p_{v_3}(0)) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{p_{v_1}(0)}{3} + \frac{p_{v_2}(0)}{2} + \frac{p_{v_3}(0)}{6}, \frac{p_{v_1}(0)}{6} + \frac{p_{v_2}(0)}{8} + \frac{p_{v_3}(0)}{12}, \frac{p_{v_1}(0)}{2} + \frac{3p_{v_2}(0)}{8} + \frac{3p_{v_3}(0)}{4} \right) \qquad (198)
\end{aligned}
$$

となる.

例題 34

1. 有向グラフ D の各点が整数の対：$\{11, 12, 21, 22\}$ で表され, $j = k$ のとき, 点 ij と kl が弧で結ばれるものとする. このとき, D を図示し, そのオイラー小道が存在するならばそれを求めよ.

2. マルコフ連鎖と有向グラフに関して以下の問いに答えよ.

(1) その遷移行列 $\boldsymbol{P}$ が

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

で与えられる 3 状態 (a,b,c と名付ける) の状態遷移を表す有向グラフを描け. ただし, 行列の行の増える方向に a,b,c と点に名前を付けること.

(2) 時刻 $t = 0$ で, この酔っ払いが a にいる, つまり, 状態ベクトルが $\boldsymbol{x} = (1, 0, 0)$ とするとき, $t = 1, 2$ において, この酔っ払いが a,b,c に居る確率 $(p_{\mathsf{a}}(1), p_{\mathsf{b}}(1), p_{\mathsf{c}}(1))$, 及び, $(p_{\mathsf{a}}(2), p_{\mathsf{b}}(2), p_{\mathsf{c}}(2))$ をそれぞれ求めよ.

(3) $t = n$ で, この酔っ払いが a,b,c に居る確率 $p_{\mathsf{a}}(n), p_{\mathsf{b}}(n), p_{\mathsf{c}}(n)$ をそれぞれ求めよ.

(解答例)

1. $\{11, 12, 21, 22\}$ において, $j = k$ が成り立つときのみ, 点 ij と kl が弧で結ばれることを考えると, 各点から他点へ描くことのできる弧は次のようになる.

$$11 \to 12, \quad 12 \to \begin{cases} 21 \\ 22 \end{cases}$$

$$21 \to \begin{cases} 11 \\ 12 \end{cases}, \quad 22 \to 21$$

のようになり, これらの関係をグラフで表すと図 193 のようになる. この図 193 から, このグラフ

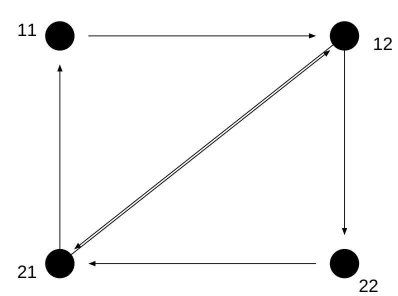

図 193: $\{11, 12, 21, 22\}$ において, 「$j = k$ が成り立つときのみ, 点 ij と kl が弧で結ばれる」規則で出来上がる有向グラフ.

は連結有向グラフ (これを D と名付けよう) であり, この連結有向グラフ D がオイラー・グラフであ

るための必要十分条件は, D の各点で入次数と出次数が等しい, つまり, D の任意の点 v において, $\mathrm{outdeg}(v) = \mathrm{indeg}(v)$ が成り立つことであるから (前回の**定理 23.1** を参照のこと), 図のグラフにおいてこれを調べると

$$\begin{aligned}\mathrm{outdeg}(11) &= 1 = \mathrm{indeg}(11)\\ \mathrm{outdeg}(12) &= 2 = \mathrm{indeg}(12)\\ \mathrm{outdeg}(21) &= 2 = \mathrm{indeg}(21)\\ \mathrm{outdeg}(22) &= 1 = \mathrm{indeg}(22)\end{aligned}$$

となり, 確かにこの条件を満たしている. 従って, オイラー小道が存在し, それは, $11 \to 12 \to 21 \to 12 \to 22 \to 21 \to 11$ である.

2. 問題文に与えられた誘導に従う.

(1) 遷移確率が問題文の $\boldsymbol{P}$ で与えられるグラフを描くと図 194 のようになる. ただし, 各弧に付された数字は各状態間の遷移確率を表す.

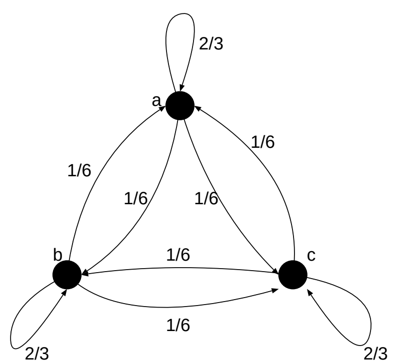

図 194: 遷移確率が $\boldsymbol{P}$ で与えられる 3 状態 a, b, c 間遷移の様子を表すグラフ.

(2)(3) 時刻 $t = n, n+1$ における状態ベクトル： $\boldsymbol{x}^n \equiv (p_{\mathsf{a}}(n), p_{\mathsf{b}}(n), p_{\mathsf{c}}(n)), \boldsymbol{x}^{n+1} \equiv (p_{\mathsf{a}}(n+1), p_{\mathsf{b}}(n+1), p_{\mathsf{c}}(n+1))$ 間には遷移確率 $\boldsymbol{P}$ を介して

$$\boldsymbol{x}^{n+1} = \boldsymbol{x}^n \boldsymbol{P} \tag{199}$$

なる関係, すなわち,

$$(p_{\mathsf{a}}(n+1), p_{\mathsf{b}}(n+1), p_{\mathsf{c}}(n+1)) = (p_{\mathsf{a}}(n), p_{\mathsf{b}}(n), p_{\mathsf{c}}(n)) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{200}$$

従って

$$p_{\mathsf{a}}(n+1) = \frac{2}{3}\,p_{\mathsf{a}}(n) + \frac{1}{6}\,p_{\mathsf{b}}(n) + \frac{1}{6}\,p_{\mathsf{c}}(n) \tag{201}$$
$$p_{\mathsf{b}}(n+1) = \frac{1}{6}\,p_{\mathsf{a}}(n) + \frac{2}{3}\,p_{\mathsf{b}}(n) + \frac{1}{6}\,p_{\mathsf{c}}(n) \tag{202}$$
$$p_{\mathsf{c}}(n+1) = \frac{1}{6}\,p_{\mathsf{a}}(n) + \frac{1}{6}\,p_{\mathsf{b}}(n) + \frac{2}{3}\,p_{\mathsf{c}}(n) \tag{203}$$

が成り立つ．後は，これらの確率に関する連立漸化式を解けばよい．どのような解き方でも良いのだが，各時刻 n での確率の規格化条件：$p_{\mathsf{a}}(n)+p_{\mathsf{b}}(n)+p_{\mathsf{c}}(n)=1$ (各時刻で酔っ払いは a, b, c のいずれかには必ず居る) から，$p_{\mathsf{c}}(n)=1-p_{\mathsf{a}}(n)-p_{\mathsf{b}}(n)$ を用いて，連立漸化式を書き直すと

$$p_{\mathsf{a}}(n+1) = \frac{1}{2}\,p_{\mathsf{a}}(n)+\frac{1}{6} \tag{204}$$

$$p_{\mathsf{b}}(n+1) = \frac{1}{2}\,p_{\mathsf{b}}(n)+\frac{1}{6} \tag{205}$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} p_{\mathsf{a}}(n) \\ p_{\mathsf{b}}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} p_{\mathsf{a}}(0) \\ p_{\mathsf{b}}(0) \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \tag{206}$$

となる．よって，例えば $p_{\mathsf{a}}(n)$ の一般項は

$$p_{\mathsf{a}}(n) = \frac{1}{2^n}\,p_{\mathsf{a}}(0)+\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}\,p_{\mathsf{a}}(0)+\frac{1}{6}\frac{1-\frac{1}{2^k}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}\,p_{\mathsf{a}}(0)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \tag{207}$$

となる．従って，当然，$p_{\mathsf{b}}(n)$ も

$$p_{\mathsf{b}}(n) = \frac{1}{2^n}\,p_{\mathsf{b}}(0)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \tag{208}$$

であり，このとき $p_{\mathsf{c}}(n)$ は

$$p_{\mathsf{c}}(n) = 1-\frac{1}{2^n}\left(p_{\mathsf{a}}(n)+p_{\mathsf{b}}(n)\right)-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \tag{209}$$

となる．

従って，あとは「この酔っ払いは時刻 $t=0$ で b に居た」という初期条件：$p_{\mathsf{a}}(0)=0, p_{\mathsf{b}}(0)=1, p_{\mathsf{c}}(0)=0$ を上に得られた一般項に代入して

$$p_{\mathsf{a}}(n) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \tag{210}$$

$$p_{\mathsf{b}}(n) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right) \tag{211}$$

$$p_{\mathsf{c}}(n) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \tag{212}$$

が得られる．

演習問題 12

円卓のまわりの 5 人 (A, B, C, D, C さんと名づけ, この順に時計まわりに着席しているとする) が 1 つのサイコロで行うゲームを考える．各ラウンドでサイコロの $1, 2$ の目が出たときには, その左隣りの人が次に振るものとし, $3, 4, 5$ が出たときには右隣りの人が次に振るものとし, 6 の目が出たときに限り, 同じ人がもう一度サイコロを振るものとする．このとき

(1) 遷移行列を書き, 状態遷移図を描け.
(2) このマルコフ連鎖はエルゴード的か否か, 理由を付して答えよ.
(3) 始めに A さんがサイコロを振るとき, 5 ラウンド目に再び A さんがサイコロを振ることになる確率を求めよ.

※ **注**：今回のレポート締め切りは **7/25 の講義開始時まで**です．なお, 試験は **9/16(金) 15:15 〜 16:45 A21 講義室**にて行います.