



Title	2005年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2005-11-18T08:53:31Z
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/771
Rights(URL)	http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learningobject
Note(URL)	http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html ; http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	GraphTheory05_slide4.pdf (第4回講義スライド)



[Instructions for use](#)



グラフ理論 #4

第4回講義 5月9日

情報科学研究科 井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

歩道・小道・道・閉路

歩道 : $v_i (i=1, \dots, m) \in G$ に対し

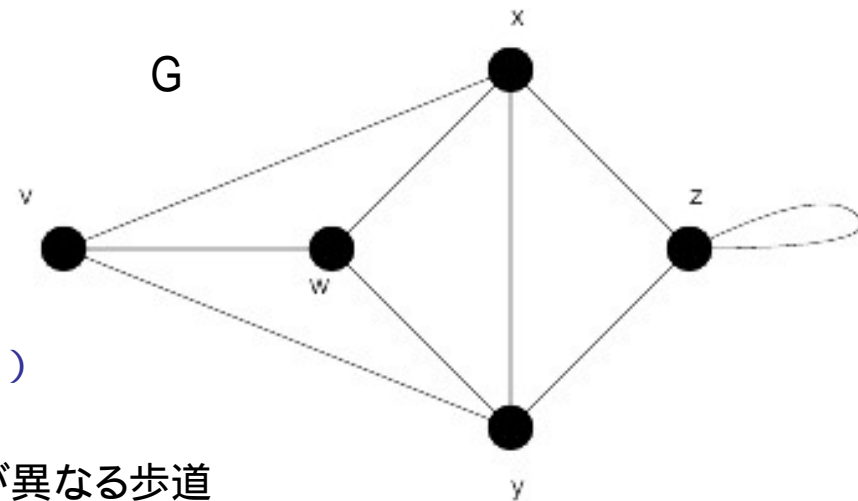
$v_0 v_1, v_1 v_2, \dots, v_{m-1} v_m$ を歩道という
始点 終点

(重複する辺があってもよい)

小道 : 全ての辺 $v_0 v_1, v_1 v_2, \dots, v_{m-1} v_m$ が異なる歩道

道 : 点 v_0, v_1, \dots, v_m が全て異なる歩道

閉路 : 少なくとも1本辺を持つ閉じた道



例題7 #1

(復習である内容を含む)

連結単純グラフ $G : \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, m 本の辺, t 個の三角形

(1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

と置くと、この2乗は

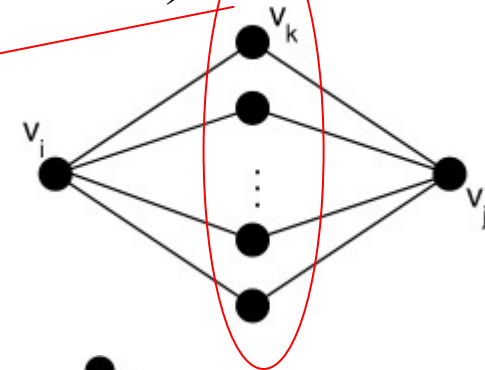
$$A^2 = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = B$$

第 ij 要素 :

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}$$

点 v_i から点 v_k を経由して v_j に至る長さの歩道の数

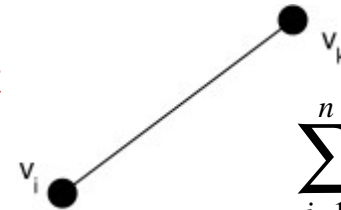
経路点 v_k に関する全ての可能性について足しあげたものは v_i と v_j 間の歩道の総数に等しい



(2)

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{ki}$$

v_i から v_k を経由して v_i に戻る歩道数
 v_i と v_k を結ぶ辺の2倍



$$\sum_{i=1}^n b_{ii}$$

は G の総辺数の2倍

例題7 #2

(復習である内容を含む)

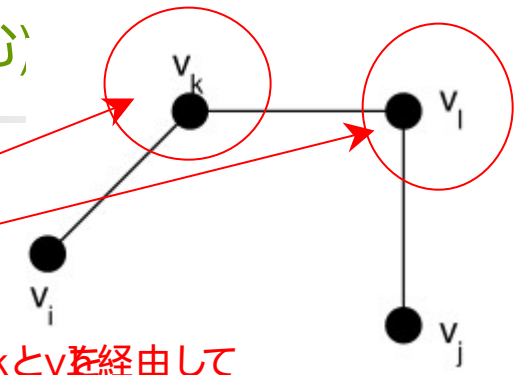
(3)

$$A^3 = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = C$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} a_{kl} a_{lj}$$

点 v_i から点 v_k と v_l を経由して点 v_j へ至る辺の本数

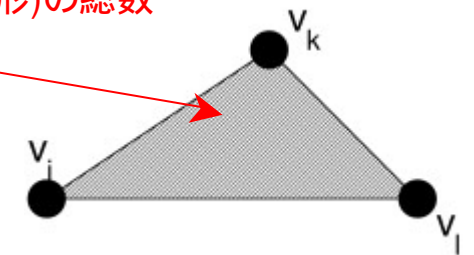
点 v_i から点 v_j へ至る歩道の総数



対角要素 :

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} a_{kl} a_{li}$$

このような閉路 (三角形) の総数



従って

$$\sum_{i=1}^n c_{ii} = \underline{6t}$$

点 i, k, l の並べ方の $3! = 6$ 通りからくる

定理5.2 #1

グラフGは n 個の点をもつ単純グラフであり、 k 個の成分がある場合、Gの辺数 m は

$$n - k \leq m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1) \quad \text{を満たす}$$

(証明)

$m \geq n - k$ について 辺数の下限に関してであるから、グラフGはできるだけ少ない辺数を持つものとする(極端な場合として木を考える)

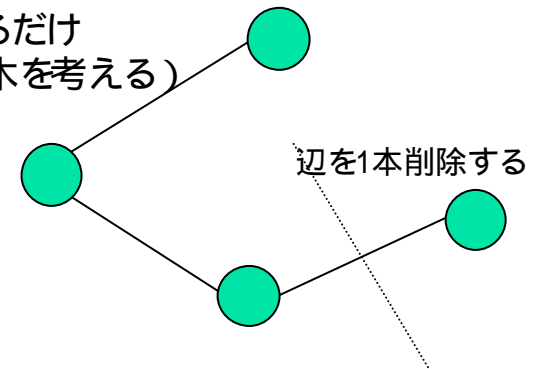
Gから辺を1本削除すると

$$k \rightarrow k + 1, n \rightarrow n, m_0 \rightarrow m_0 - 1$$

$m_0 - 1 \geq n - (k + 1)$ $m_0 - 1$ 本の辺に関して不等式の成立を仮定
(帰納法の仮定。 $m_0 = 0$ の場合は自明)

$$m_0 \geq n - k$$

m_0 本の辺について成立 全ての辺数について成立



定理5.2 #2

$m \leq (n-k)(n-k+1)/2$ の成立について示す

辺数の上界を示すので、グラフGは辺数の最も多い完全グラフとして考える

$C_i + C_j$ の辺の総数

$$N_{ij} = \frac{1}{2}n_i(n_i - 1) + \frac{1}{2}n_j(n_j - 1)$$

次の操作を行う

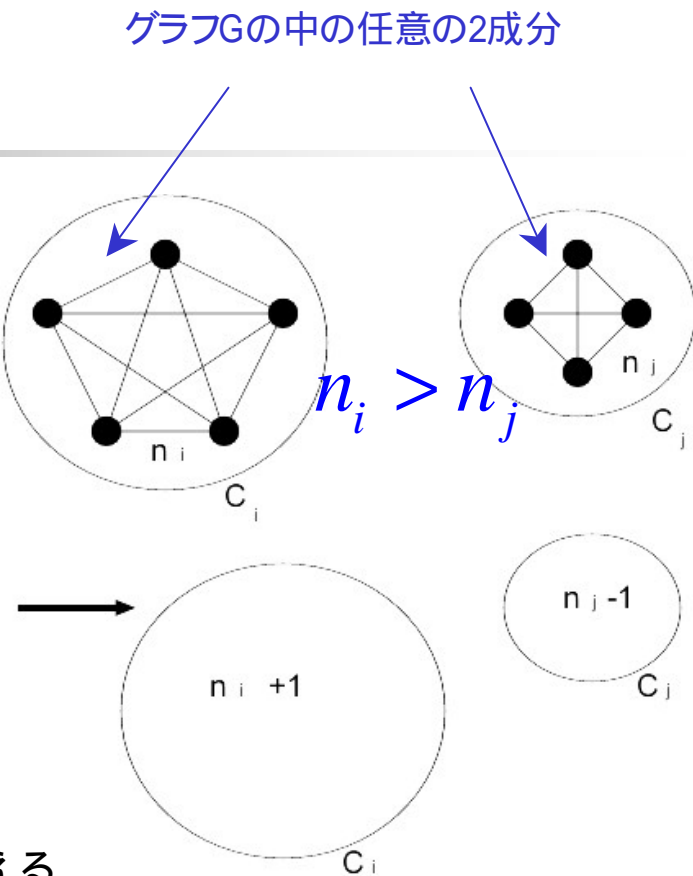
$C_i \Rightarrow n_i + 1$ 個の点をもつ完全グラフ

$C_j \Rightarrow n_j - 1$ 個の点をもつ完全グラフ

$\Delta N_{ij} = n_i - n_j + 1 > 0$ だけ点の総数は増える

この操作を繰り返すと $n-k+1$ 個の完全グラフと $k-1$ 個の孤立点 が得られる

$$m \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$



が成立する

例題8 #1

$d(v, w)$ は v から w への最短路の長さ

$d(v, w) \geq 2$ ならば、 $d(v, z) + d(z, w) = d(v, w)$ なる点 z が存在する

(証明のアウトライン)

図において

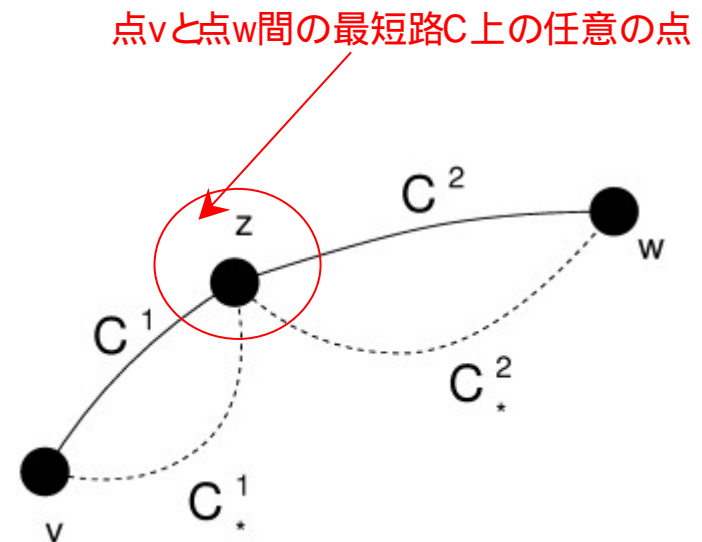
C^1 は点 v と点 z を結ぶ最短路である

もし、これ以外に最短路 C_*^1 があるとすれば経路

$C_*^1 + C^2$ が v と w を結ぶ最短路となり仮定に反する

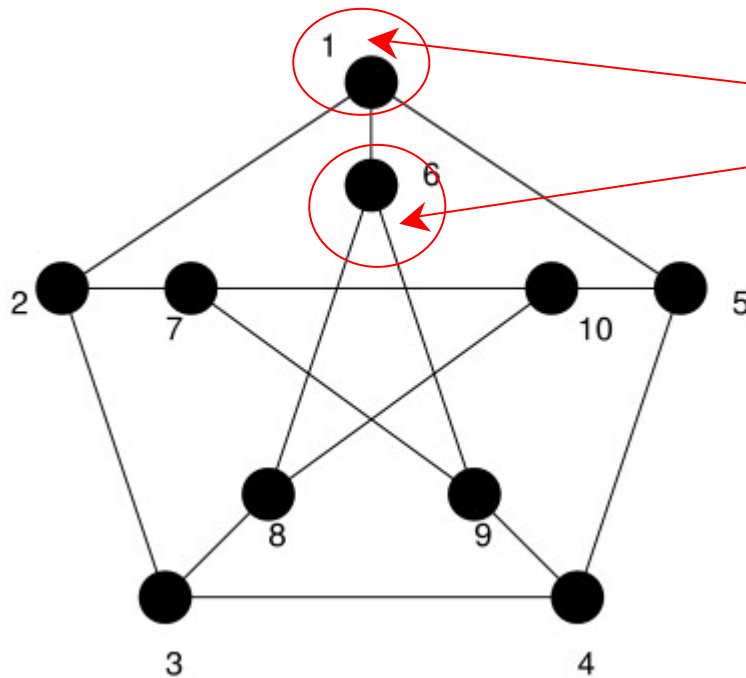
C^2 についても同様の議論ができる

考えるグラフは連結であるから、いつでも C 上に z をとることができる



例題8 #2

ピーターソン・グラフにおいて、任意の2点 v, w に対し
 $d(v, w) = 1$ または $d(v, w) = 2$ である



ピーターソン・グラフの対称性から

$$v = 1, v = 6$$

をスタート点を選んだときの可能な経路の
長さを調べればよい。実際に調べてみると

$$d(1, 2) = 1, d(1, 3) = 2, \dots, d(1, 10) = 2,$$
$$d(6, 1) = 1, \dots, d(6, 10) = 2$$

となり 満たす。

詳細は講義ノート

非連結化集合とカットセット

要素数最小のカットセット

非連結化集合:

それを除去するとグラフが非連結となる辺の集合

カットセット:

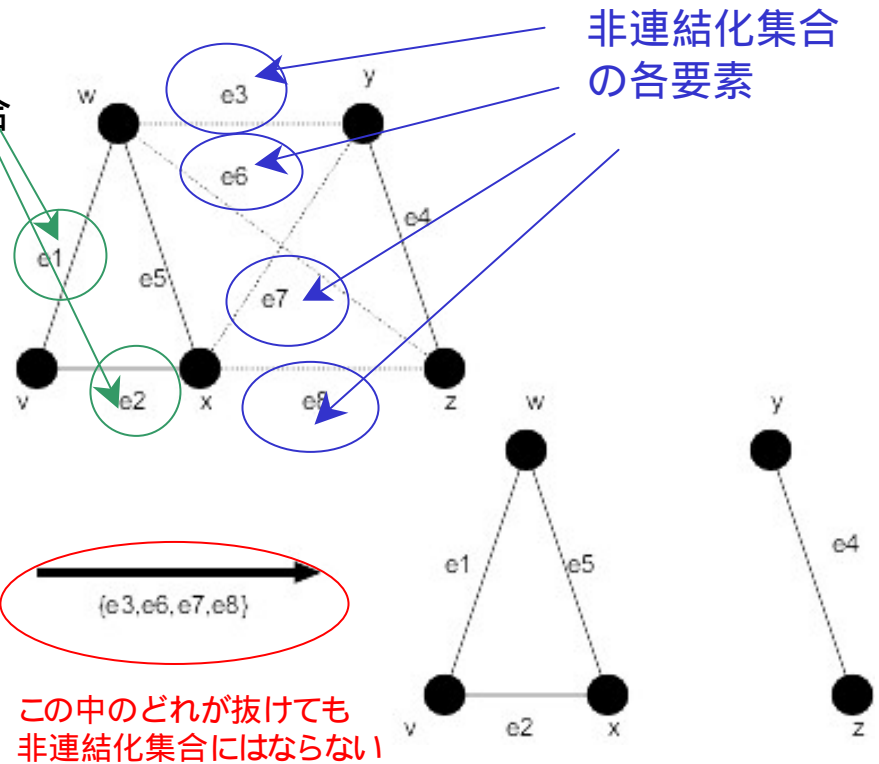
そのどのような部分集合も非連結化集合ではない、非連結化集合

辺連結度 (edge-connectivity) $I(G)$

連結グラフの最小なカットセットの大きさ

例に挙げた右図では

$$I(G) = 2$$



分離集合とカット点

分離集合:

それを除去するとグラフが非連結となる点の集合

(辺を除去する際にはその接続辺も除去する)

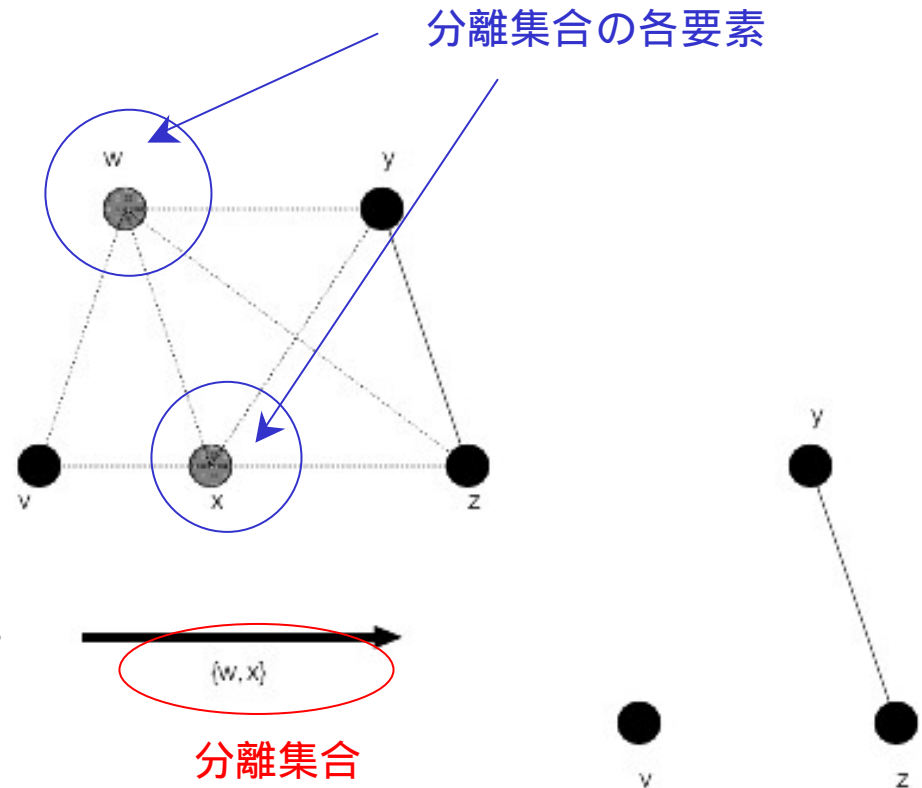
カット点:

1個の点からなる分離集合

連結度: グラフの最小な分離集合の大きさ

図の例では $k(G) = 2$

$k(G) \geq k$ のときグラフGは **k連結** であるという



例題9

