グラフ理論　#5

第5回講義　5月16日

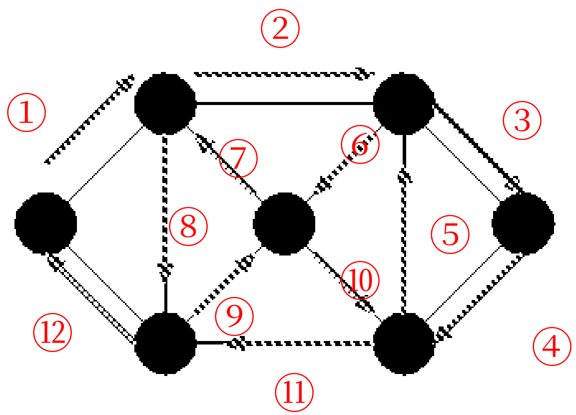
情報科学研究科　　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

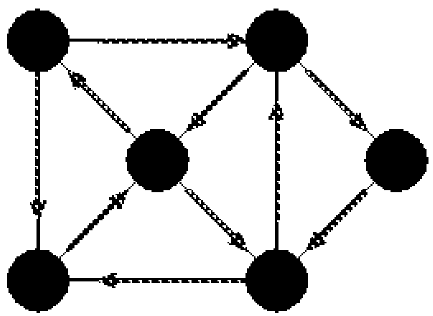
オイラー・グラフ

オイラー・グラフ (Eulerian graph)：全ての辺を含む閉じた小道がある連結グラフ

半オイラー・グラフ(semi-Eulerian graph)：全ての辺を含む小道がある連結グラフ
閉じてなくてもよい)



Eulerian graph



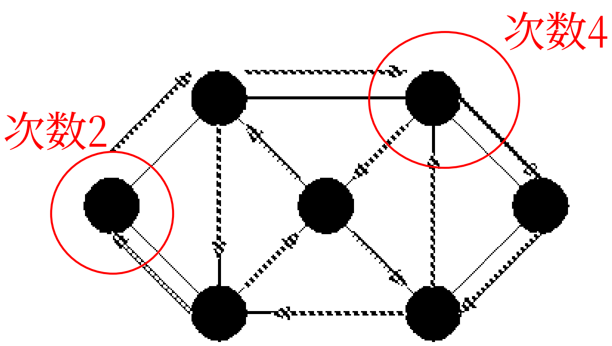
閉じない

Semi-Eulerian graph

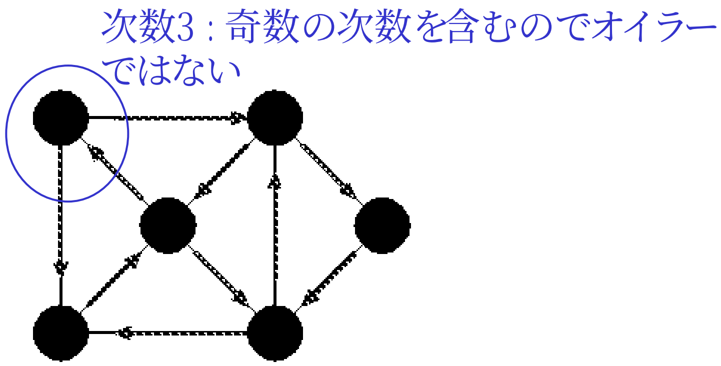
⇒ オイラー・グラフである条件は何か？

定理6 ·2とその証明 #1

連結グラフGがオイラー ·グラフであるための必要十分条件はGの各点の次数が全て偶数であることである。



Eulerian graph



Semi-Eulerian graph

証明)
必要性 ⇒

Gのオイラー小道がある点を通過する毎に2を加えていくと、
全ての辺はちょうど1回ずつ含まれるので、各点でこの和はその点での次数に等しく、それは偶数。

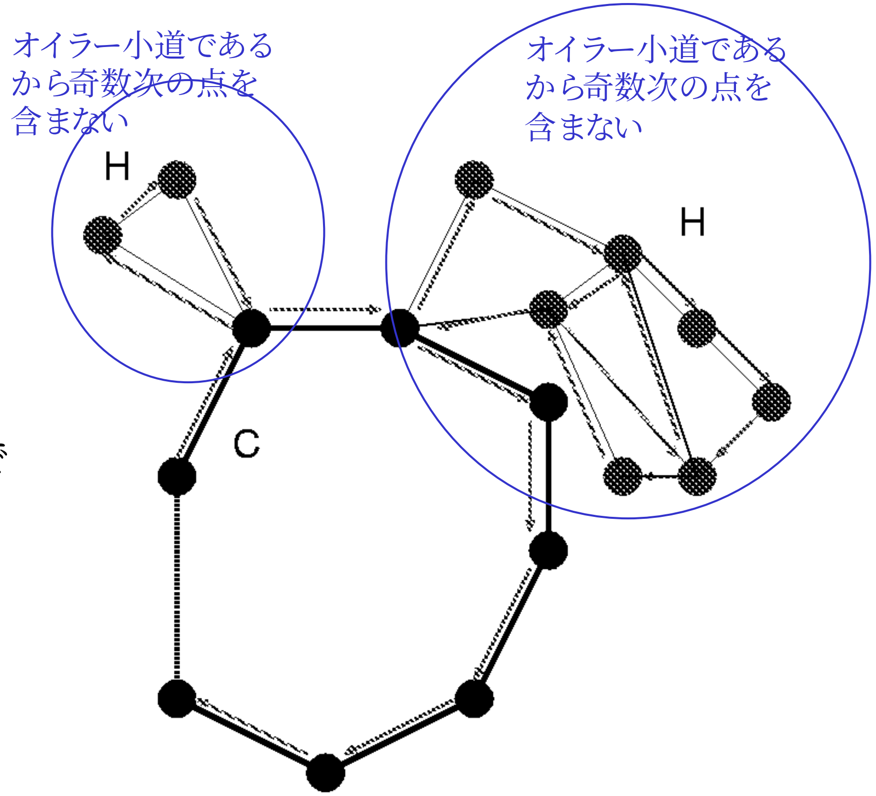
定理6・2とその証明 #2

(証明)
十分性 (アウトライン) ←

各点の次数が偶数であり、連結ならば
必ず閉路を含む(補題 6・1)。これをCとする

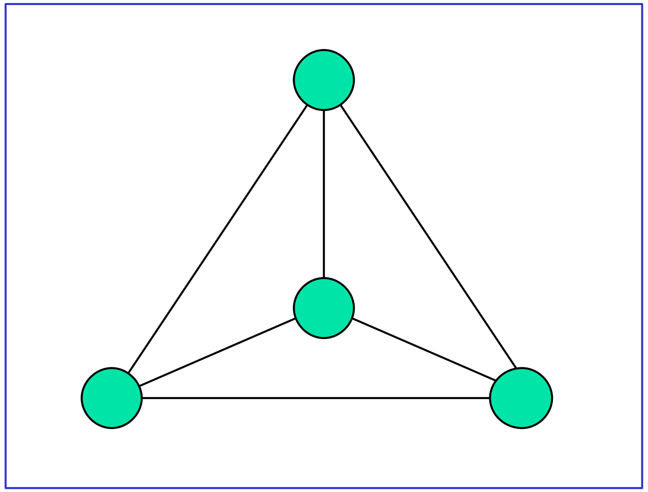
$G \subset C$ なら証明が終わってしまうので
これは考えない。

C上の任意の点からスタートし、Cの辺を
たどり、Hの孤立点でない点に出くわす
たびに、その点を含むHのオイラー小道
をたどり、その点に戻る・・・という操作を
行い、スタート点に戻れば、オイラー・グラフ
が得られる。

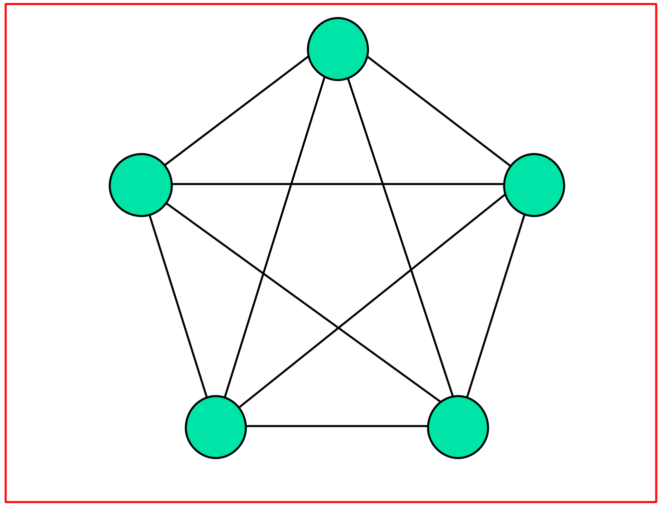


例題11 #1

(1)



オイラー・グラフでない



オイラー・グラフである

完全グラフの場合には

$$n-1=\text{偶数}$$

の場合に限り、オイラー・グラフとなる。

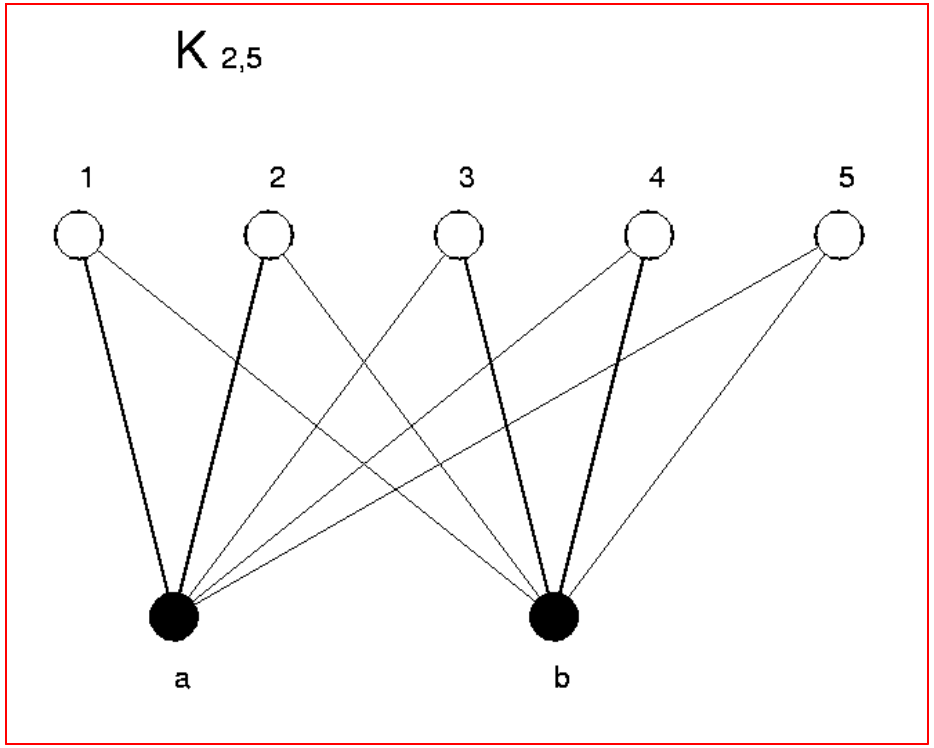
例題11 #2

(2)　$K_{s,\,t}$　に関しては

$s \geq 2$, **かつ，** t **が偶数ならば**

a→1→b→2→a→3→b→4→a
→5→b

のような経路でオイラー小道を
作ることは可能。



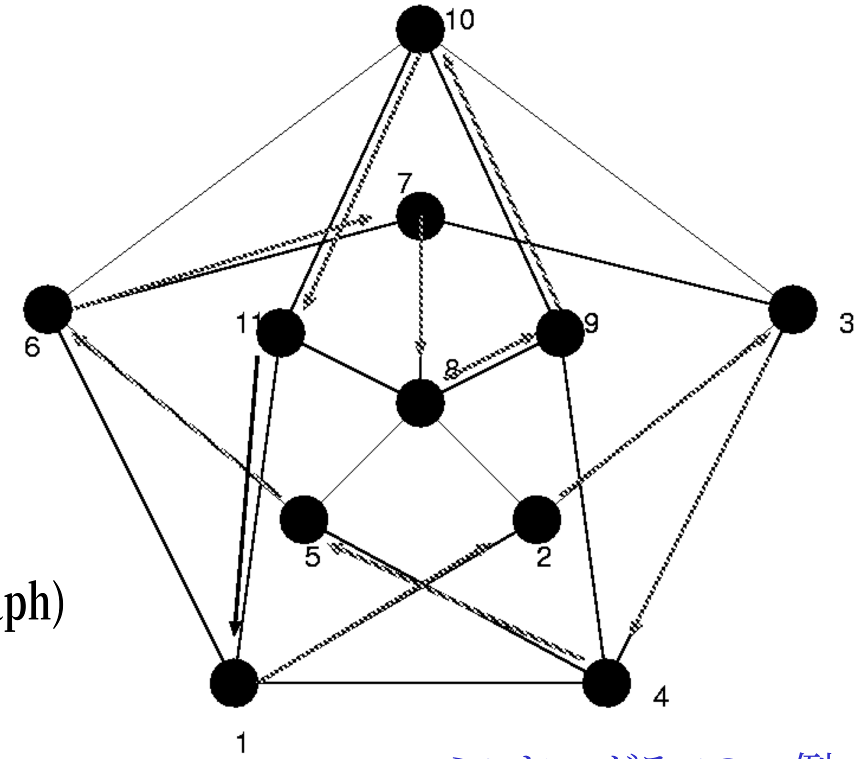
オイラー・グラフ

ハミルトン・グラフ

ハミルトン閉路 (Hamiltonian cycle)
: グラフGの各点をちょうど一度だけ通る
閉じた小道

ハミルトン・グラフ(Hamiltonian graph)
: ハミルトン閉路によりなるグラフ

半ハミルトン・グラフ(semi-Hamiltonian graph)
: 全ての点を通る道があるグラフ
(閉じなくてよい)



ハミルトン・グラフの一例

⇒ ハミルトン・グラフである条件は何か？

Ore (オーレ)の定理

Oreの定理

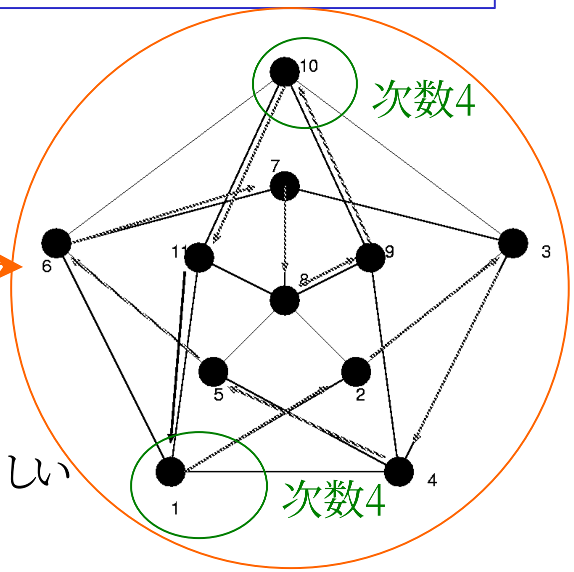
単純グラフGには $n \ge 3$ 個の点があるとする。隣接していない任意の2点 v, w に対し

$$\deg(v)+\deg(w)\ge n$$

が成立するとき、Gはハミルトン・グラフである。

直観的には各点への接続辺が
十分多ければ、ハミルトン閉路があるであろう
ということを言っている。
これは**十分条件**であることに注意。

このグラフはOreの定理を
満たさないが、ハミルトン・グラフである



「ハミルトン・グラフであることを示せ」という問いは易しいが、
「ハミルトン・グラフでないことを示せ」という問いは多くの場合難しい

⇒ **今週の演習問題参照**

Oreの定理の証明(アウトライン)

(証明)　「グラフGはハミルトンではないが、条件式を満たす」として矛盾を引き出す。

Gがぎりぎりハミルトンでない、とすると、全ての点を含む道：

$$v_1 \to v_2 \to v_3 \to \cdots \to v_n$$

がある。　仮定より隣接しない

$$\deg(v_1) + \deg(v_n) \geq n$$

とすると

このような
閉路ができてしまう
（矛盾）