グラフ理論　#7

第7回講義　6月6日

情報科学研究科　　　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

Cayleyの定理とその証明 #1

n点の異なるラベル付き木の総数はn^{n-2}個である

Cayleyの定理

証明）

準備：　$\deg(v) = k-1$**の点**v**を含むラベル付き木**$: A$

$\deg(v) = k$**の点**v**を含むラベル付き木**$: B$

n**個の点からなるラベル付き木のある点の次数が**k
であるものの総数を$T(n,k)$**とする**

証明のポイント:

「ラベル付き木Aからラベル付き木Bを作る連鎖の総数」
＝「ラベル付き木Bからラベル付き木Aを作る連鎖の総数」

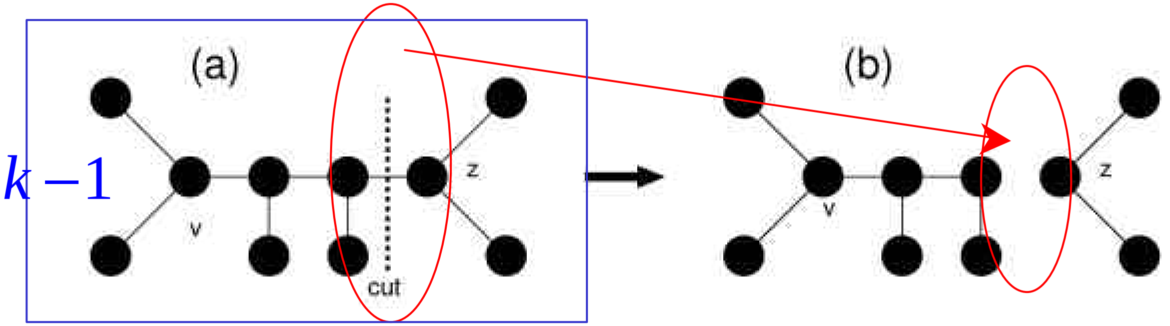
という条件式から　$T(n,k)$　を導く

Cayleyの定理とその証明 #2

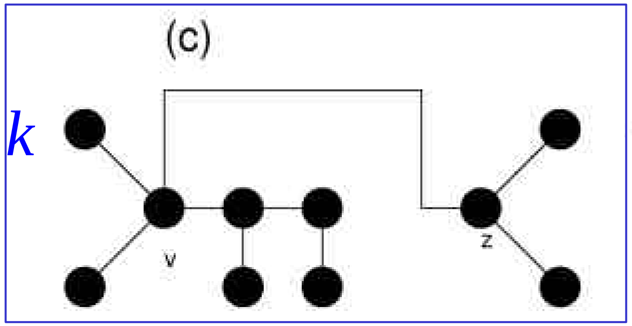
Aをvに接続していない辺で分離する

連鎖 :A→B　：

$A:\deg(v)=k-1$



$B:\deg(v)=k$



分離した端点のうち、
点 vを含まない方の点 z
を点 vとつなげる

切断する辺の選び方　：　**(点vに接続しない辺の選び方)**$=$**(木Aの辺数)**$-$**(点vの次数)**

$=(n-1)-(k-1)=n-k$

$$\textbf{(連鎖：}A\rightarrow B\textbf{の総数)}=\underbrace{T(n,k-1)}_{\text{Aの総数}}(n-k)$$

Cayleyの定理とその証明 #3

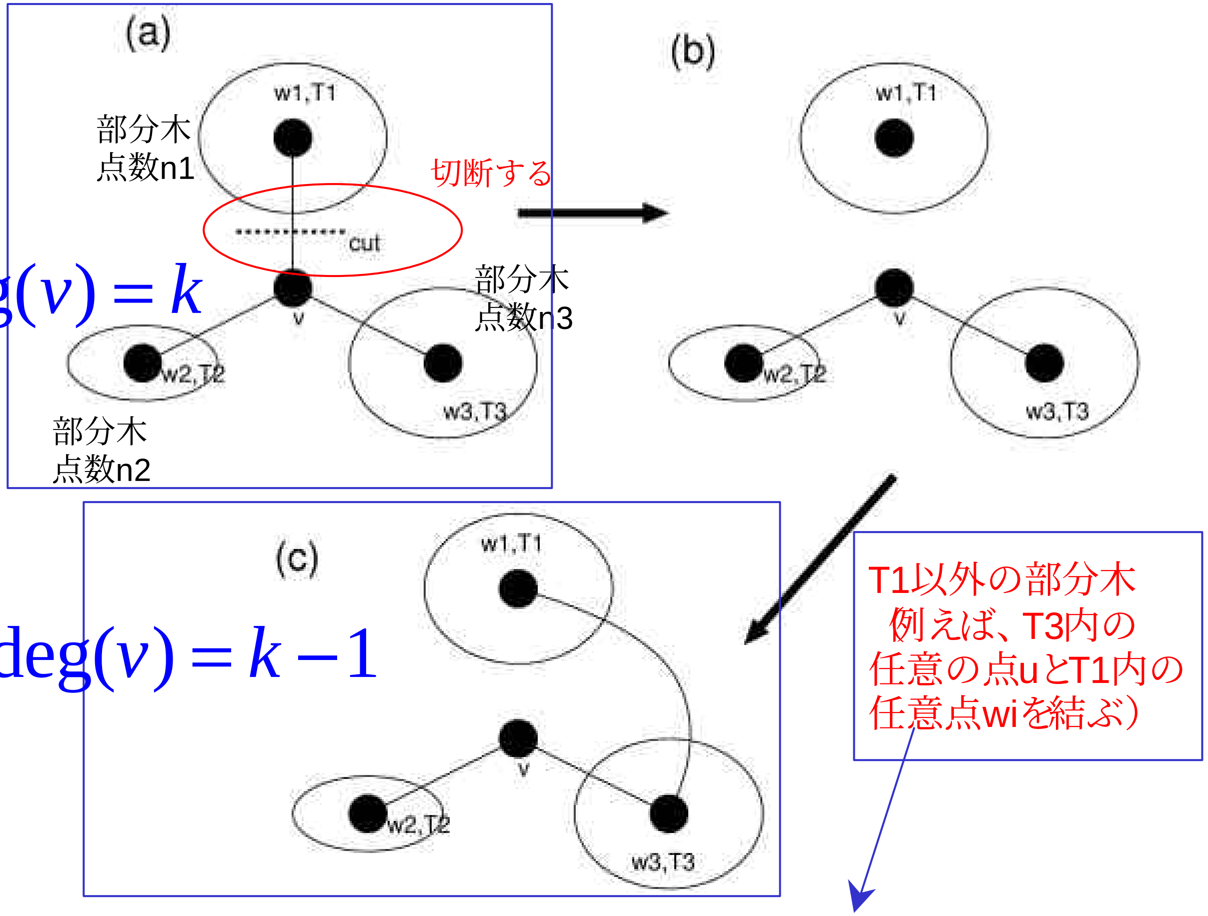
連鎖 :B→A ：

部分木T_iの点数をn_iとすると

$$n-1=\sum_{i=1}^{k} n_i$$

点 v以外の点数

$$B:\deg(v)=k$$



$$A:\deg(v)=k-1$$

連鎖B→Aの総数

Bの総数

$$T(n,k)\sum_{i=1}^{k}(n-1-n_i)$$

$$=T(n,k)(n-1)(k-1)$$

(点vを除く点数)-(部分木T_iに属する点数)

$=(n-1)-n_i$ **（通り）**

Cayleyの定理とその証明 #4

[連鎖：A→Bの総数]=[連鎖：B→Aの総数] とおくと

$$(n-k)T(n,k-1)=(n-1)(k-1)T(n,k)$$

k=n-1,n-2,n-3,….を書き出してみると

定義より1である

$$T(n,n-2)=T(n,n-1)(n-1)(n-2)$$
$$T(n,n-3)=\tfrac{1}{2}(n-1)^2(n-2)(n-3)$$
$$T(n,n-4)=\tfrac{1}{3!}(n-1)^3(n-2)(n-3)(n-4)$$

これを一般化し、k=k+1のとき

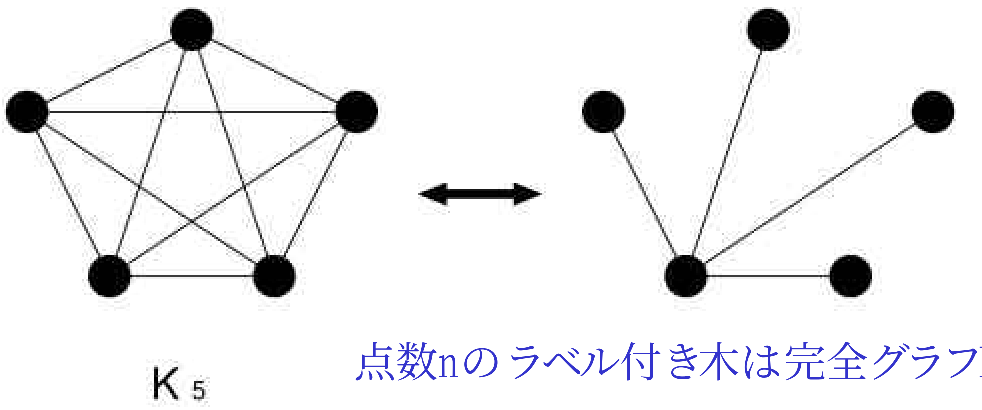
$$\boxed{T(n,k)=\frac{(n-1)^{n-k+1}(n-2)}{(k-1)(k-2)\cdots}={}_{n-2}C_{k-1}(n-1)^{n-k-1}}$$

Cayleyの定理とその証明 #5

求めるラベル付き木の総数は

$$T(n)=\sum_{k=1}^{n-1}T(n,k)=\sum_{k=1}^{n-1}{}_{n-2}C_{k-1}1^{k-1}(n-1)^{(n-2)-(k-1)}=\{(n-1)+1\}^{n-2}=\boxed{n^{n-2}}$$

系: 完全グラフK_nの全域木の総数はn^{n-2}である



点数nのラベル付き木は完全グラフKnに一対一に対応する

点行列と行列木定理

グラフGの点行列： $\mathbf{D}$

$$D_{ij} = \begin{cases} \text{点}v_i\text{の次数} & (i = j\text{のとき}) \\ -(\text{点}v_i\text{と点}v_j\text{を結ぶ辺数}) & (i \neq j\text{のとき}) \end{cases}$$

このとき、グラフGの全域木の本数は点行列の任意の余因子で与えられる

$$\boxed{t(G) = (-1)^{i+j} \left| \mathbf{D}(\bar{i}, \bar{j}) \right|}$$

行列木定理の適用例

例題16

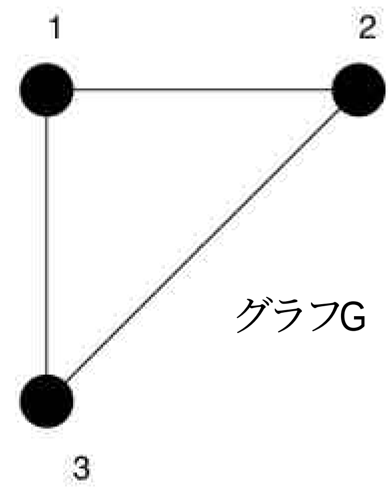
隣接行列Aが

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$ **で与えられるグラフGの全域木の総数$t\,(G)$を求めよ**

このグラフGの点行列は

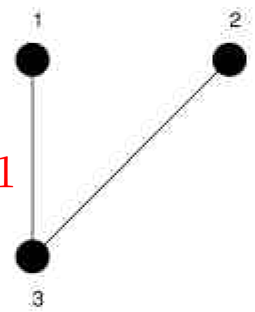
$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$ なので

$$t\,(G)=\begin{vmatrix}2&-1\\-1&2\end{vmatrix}=4-1=3$$

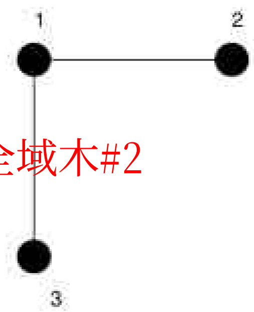


グラフG

全域木#1



全域木#2



全域木#3