



Title	2005年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2005-11-18T08:53:31Z
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/771
Rights(URL)	http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learningobject
Note(URL)	http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html ; http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	GraphTheory05_slide7.pdf (第7回講義スライド)



[Instructions for use](#)



グラフ理論 #7

第7回講義 6月6日

情報科学研究科 井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/



Cayleyの定理とその証明 #1

n 点の異なるラベル付き木の総数は n^{n-2} 個である

Cayleyの定理

(証明)

準備: $\deg(v) = k - 1$ の点 v を含むラベル付き木: A

$\deg(v) = k$ の点 v を含むラベル付き木: B

n 個の点からなるラベル付き木のある点の次数が k
であるものの総数を $T(n, k)$ とする

証明のポイント:

「ラベル付き木 A からラベル付き木 B を作る連鎖の総数」
= 「ラベル付き木 B からラベル付き木 A を作る連鎖の総数」

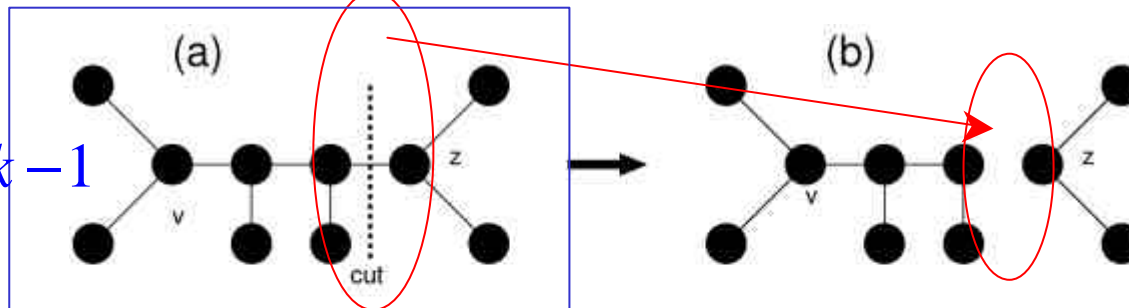
という条件式から $T(n, k)$ を導く

Cayleyの定理とその証明 #2

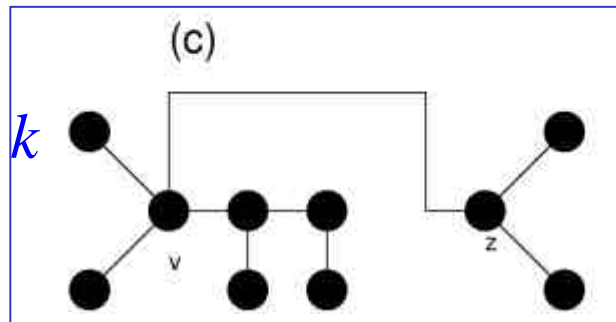
Aをvに接続していない辺で分離する

連鎖 : A B :

A : $\deg(v) = k - 1$



B : $\deg(v) = k$



分離した端点のうち、
点 v を含まない方の点 z を点 v とつなげる

切断する辺の選び方 : (点 v に接続しない辺の選び方) = (木 A の辺数) - (点 v の次数)
 $= (n - 1) - (k - 1) = n - k$

(連鎖 : $A \rightarrow B$ の総数) = $\frac{T(n, k - 1)(n - k)}{\text{Aの総数}}$

Cayleyの定理とその証明 #3

連鎖 B A :

部分木 T_i の点数を n_i とすると

$$n-1 = \sum_{i=1}^k n_i$$

点 v 以外の点数

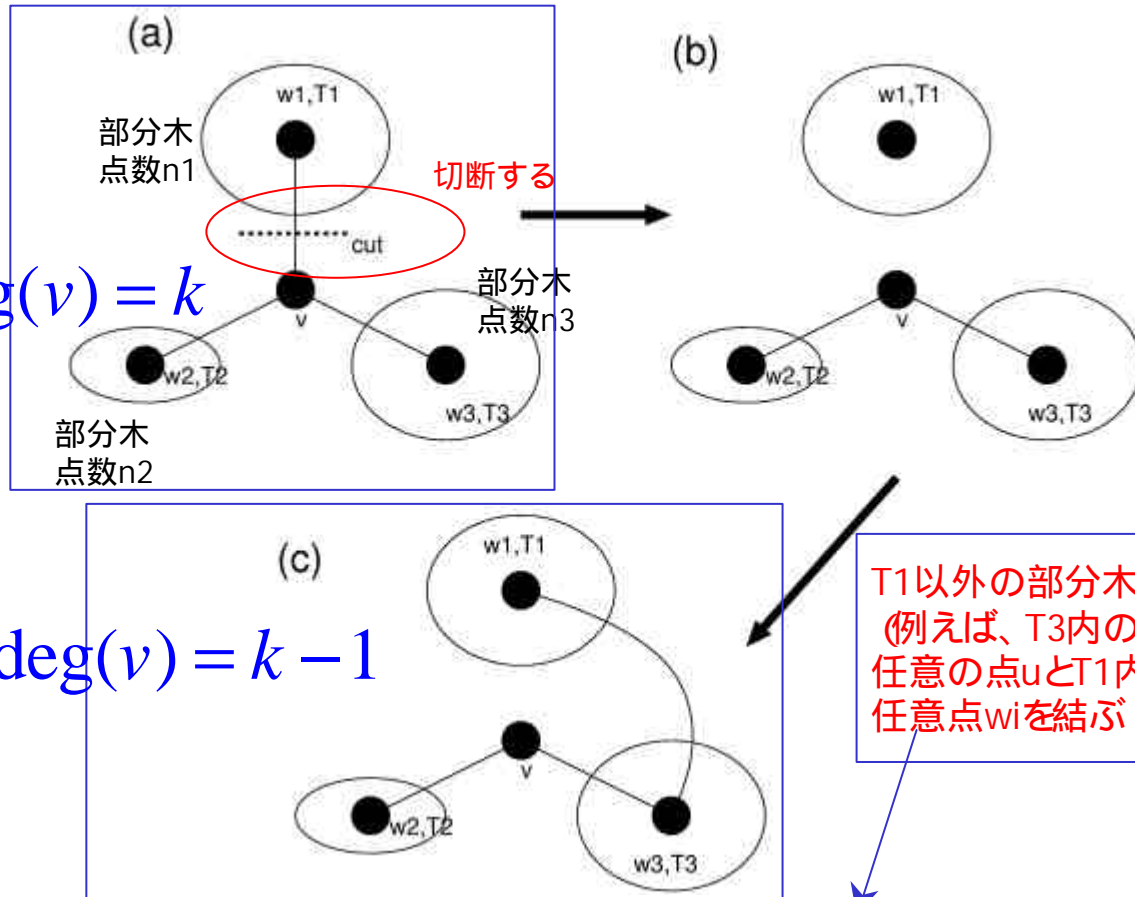
$$B : \deg(v) = k$$

連鎖 B A の総数
B の総数

$$T(n, k) \sum_{i=1}^k (n-1-n_i)$$

$$= T(n, k)(n-1)(k-1)$$

$$A : \deg(v) = k-1$$



T1以外の部分木
(例えば、T3内の
任意の点 u と T1内の
任意点 w_i を結ぶ)

$$\begin{aligned} & (\text{点 } v \text{ を除く点数}) - (\text{部分木 } T_i \text{ に属する点数}) \\ &= (n-1) - n_i \quad (\text{通り}) \end{aligned}$$

Cayleyの定理とその証明 #4

[連鎖 : A Bの総数]=[連鎖 : B Aの総数]とおくと

$$(n-k)T(n, k-1) = (n-1)(k-1)T(n, k)$$

$k=n-1, n-2, n-3, \dots$ を書き出してみると

定義よりである

$$T(n, n-2) = T(n, n-1)(n-1)(n-2)$$

$$T(n, n-3) = \frac{1}{2}(n-1)^2(n-2)(n-3)$$

$$T(n, n-4) = \frac{1}{3!}(n-1)^3(n-2)(n-3)(n-4)$$

これを一般化し $k=k+1$ のとき

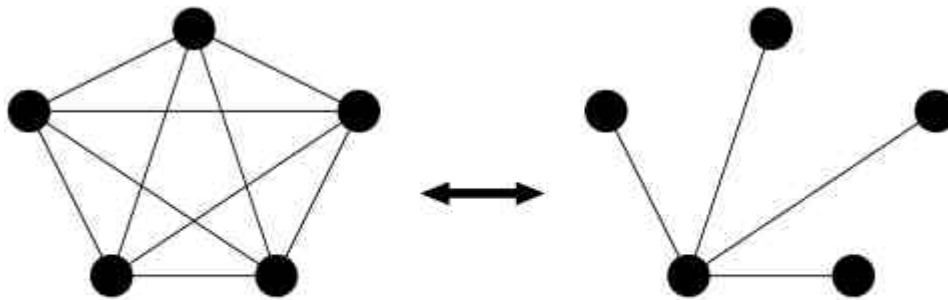
$$T(n, k) = \frac{(n-1)^{n-k+1}(n-2)}{(k-1)(k-2)\dots} = {}_{n-2}C_{k-1}(n-1)^{n-k-1}$$

Cayleyの定理とその証明 #5

求めるラベル付き木の総数は

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} T(n, k) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} 1^{k-1} (n-1)^{(n-2)-(k-1)} = \{(n-1) + 1\}^{n-2} = n^{n-2}$$

系: 完全グラフ K_n の全域木の総数は n^{n-2} である



K_5

点数 n のラベル付き木は完全グラフ K_n に一対一に対応する



点行列と行列木定理

グラフGの点行列：**D**

$$D_{ij} = \begin{cases} \text{点 } v_i \text{ の次数} & (i = j \text{ のとき}) \\ -(\text{点 } v_i \text{ と点 } v_j \text{ を結ぶ辺数}) & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき、グラフGの全域木の本数は点行列の任意の余因子で与えられる

$$t(G) = (-1)^{i+j} |\mathbf{D}(\bar{i}, \bar{j})|$$

行列木定理の適用例

例題16

隣接行列Aが

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{で与えられるグラフ } G \text{ の全域木の総数 } t(G) \text{ を求めよ}$$

このグラフGの点行列は

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ なので}$$

$$t(G) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

