



Title	2005年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2005-11-18T08:53:31Z
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/771">http://hdl.handle.net/2115/771</a>
Rights(URL)	<a href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learningobject
Note(URL)	<a href="http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html">http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html</a> ; <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	GraphTheory05_slide9.pdf (第9回講義スライド)



[Instructions for use](#)



# グラフ理論 #9

第9回講義 6月20日

---

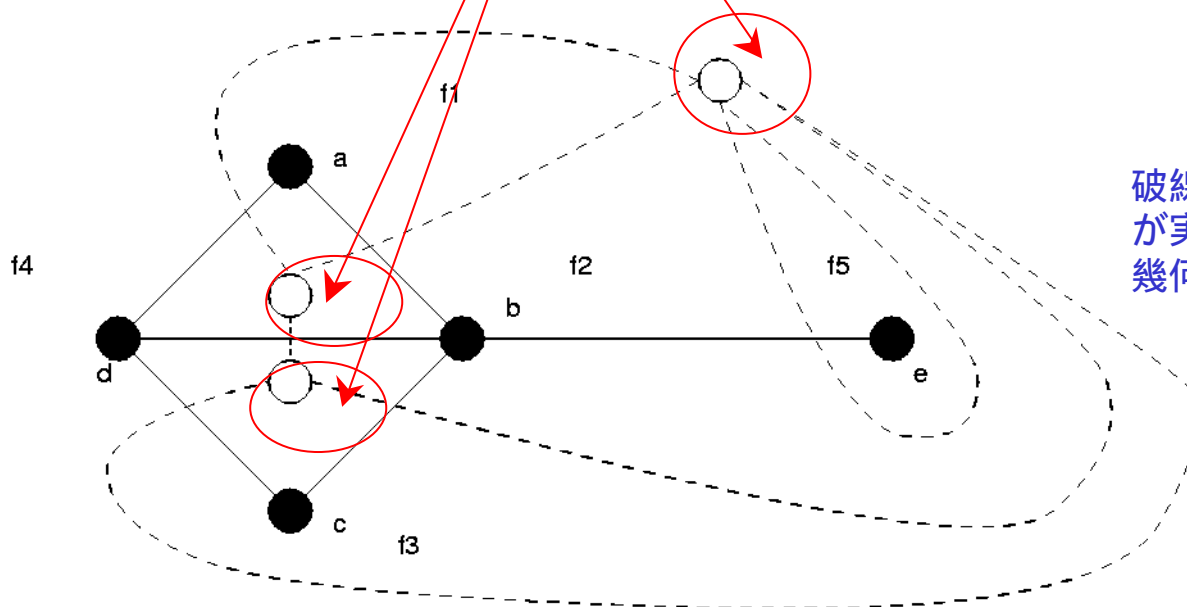
情報科学研究科 井上純一

[http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/)

# 幾何学的双対グラフ

## 幾何学的双対グラフの作り方

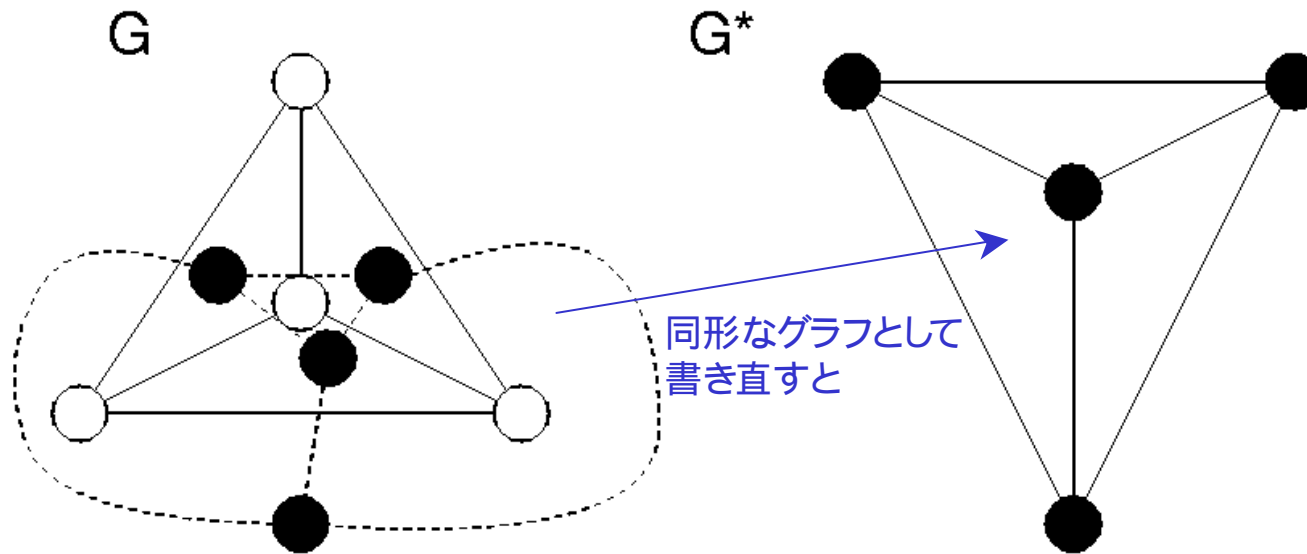
- (1) グラフ  $G$  の各面  $f$  の内側の点  $v^*$  を選ぶ  $\Rightarrow$  双対グラフ  $G^*$  の点となる
- (2) グラフ  $G$  の各辺  $e$  に対応させて、 $e$  に交差する線  $e^*$  を描いて、 $e$  に接する2つの面  $f$  の点  $v^*$  を結ぶようにする  $\Rightarrow$  双対グラフ  $G^*$  の辺となる



破線と白丸からなるグラフ  
が実線と黒丸からなるグラフの  
幾何学的双対グラフになっている

# 幾何学的双対グラフの例

完全グラフ $K_4$ の幾何学的双対グラフは完全グラフ $K_4$ である





## 補題15・1とその証明

平面グラフ $G$ には  $n$  個の点、 $m$  本の点、 $f$  個の面がある。

このとき幾何学的双対グラフ $G^*$ には  $n^*$  個の点、 $m^*$ 本の辺、 $f^*$ 個の面があるならば

$$n^* = f, m^* = m, f^* = n$$

が成り立つ

(証明)

双対グラフの作り方から、 $n^* = f, m^* = m$  は明らか。

オイラーの公式より

$$n^* - m^* + f^* = 2, f^* = 2 - n^* + m^* = 2 - f + m = n$$

従って、 $f^* = n$

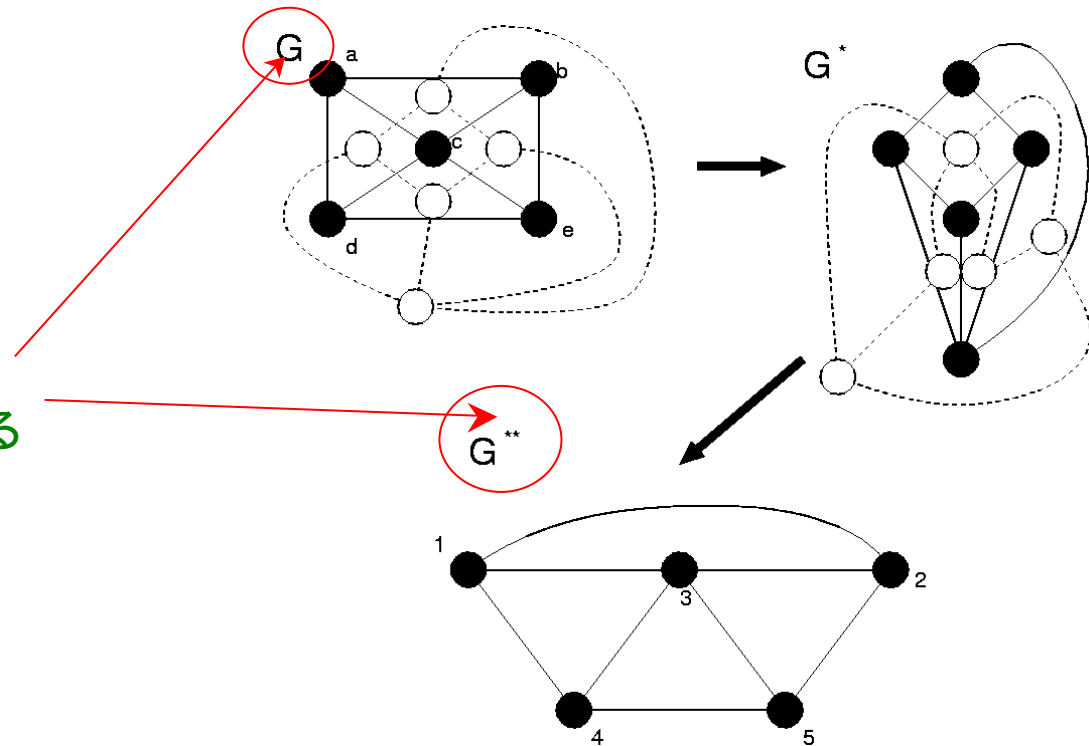
# 定理15・2

グラフ $G$ が連結平面ならば、 $G^{**}$ はグラフ $G$ と同形である

(例)

$$G \cong G^{**}$$

同形写像が存在する  
ことは講義ノート  
例題26.1参照



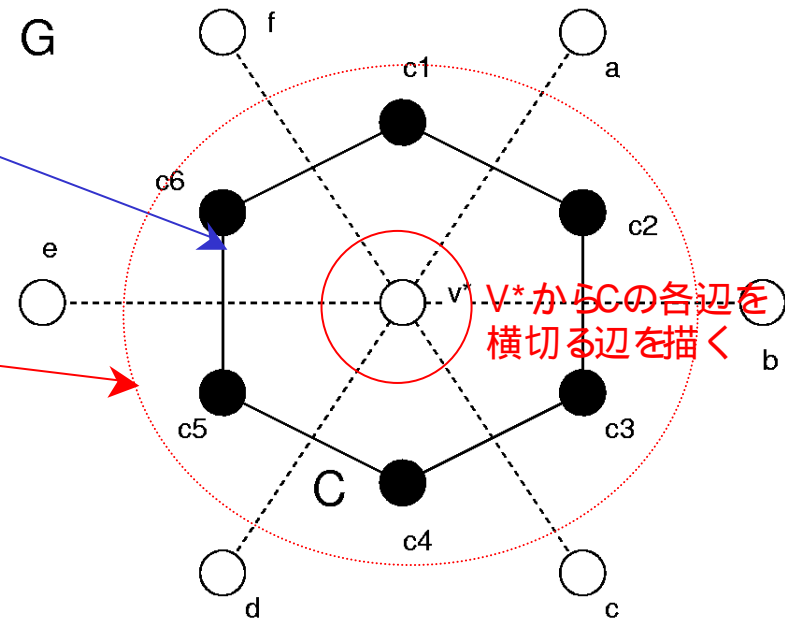
# 定理15 3

平面グラフ $G$ の幾何学的双対を $G^*$ とする。グラフ $G$ の各辺のある集合がグラフ $G$ において閉路であるための必要十分条件は、それに対応する双対グラフ $G^*$ の辺集合が、グラフ $G^*$ においてカットセットになっていることである

$\{v^*a, v^*b, v^*c, v^*d, v^*e, v^*f\}$

は $G^*$ においてカットセットになっている

閉路C



# 系15・4

グラフ  $G$  のある辺集合が  $G$  のカットセットであるための必要十分条件は、対応する幾何学的双対グラフ  $G^*$  の辺集合が  $G^*$  の閉路となることである

$G$  のカットセット:  $\{\overline{17}, \overline{28}, \overline{39}, \overline{410}, \overline{511}, \overline{612}\}$

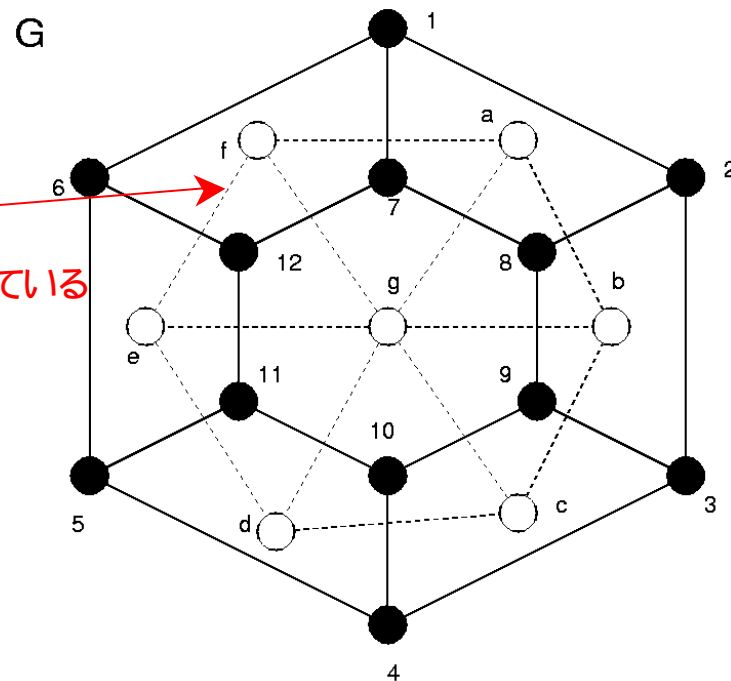
対応する幾何学的双対グラフ  $G^*$  の辺集合

$\{\overline{fa}, \overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{de}, \overline{ef}\}$

$G^*$  においては閉路となっている

(証明のアウトライン)

定理15・3を  $G$ 、 $G^*$ 、 $G^*$ 、 $G^{**}$  として読みかえると、  
定理15・2から  $G^{**}$  と  $G$  は同形であるから題意が言える。





# グラフの彩色：点彩色

k-彩色可能：k個の色の一つをGの各点に割り当て、隣接するどの2つの点も同じ色になるようにできること

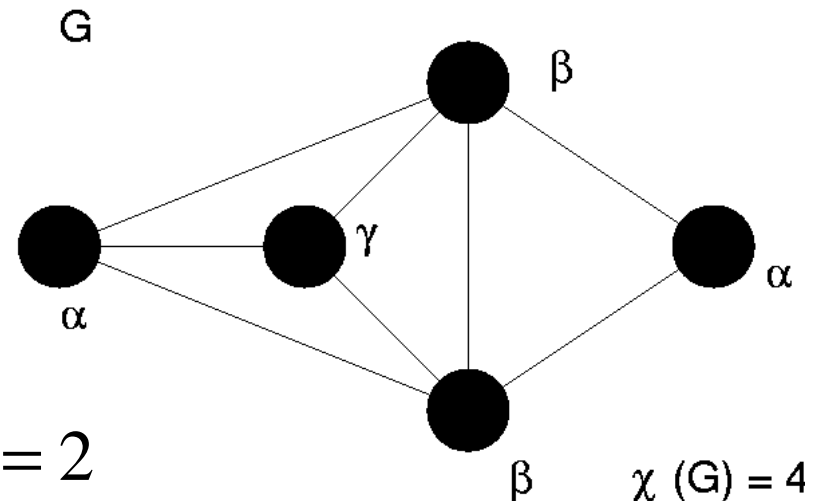
k-彩色的：グラフGがk彩色可能であるが、(k-1)彩色不可能であるとき  
グラフGの彩色数はkである

$$c(G) = k$$

彩色数はkである、というのを  
このように表記する

いくつかの代表的グラフに対する例：

$$c(K_n) = n, c(N_n) = 1, c(K_{r,s}) = 2$$



# 定理17・1

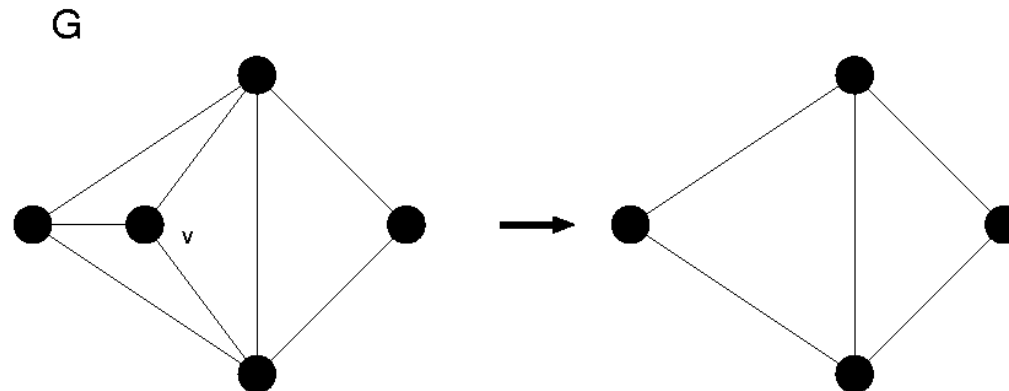
単純グラフ $G$ の最大次数が $\Delta$ ならば、グラフ $G$ は $(\Delta+1)$ 彩色可能である

(証明)

点数に関する帰納法で示す。

任意の点 $v$ とその接続辺を除去してできる $n-1$ 個の点、最大次数 $\Delta$ のグラフは $(\Delta+1)$ 彩色可能であると仮定する

$v$ を元に戻し、 $v$ に隣接する $\Delta$ 個以下の点と異なる色で $v$ を彩色すれば、 $n$ 個の点からなるグラフ $G$ の $(\Delta+1)$ 彩色が得られる



# 定理17 3

全ての単純平面グラフは6彩色可能である

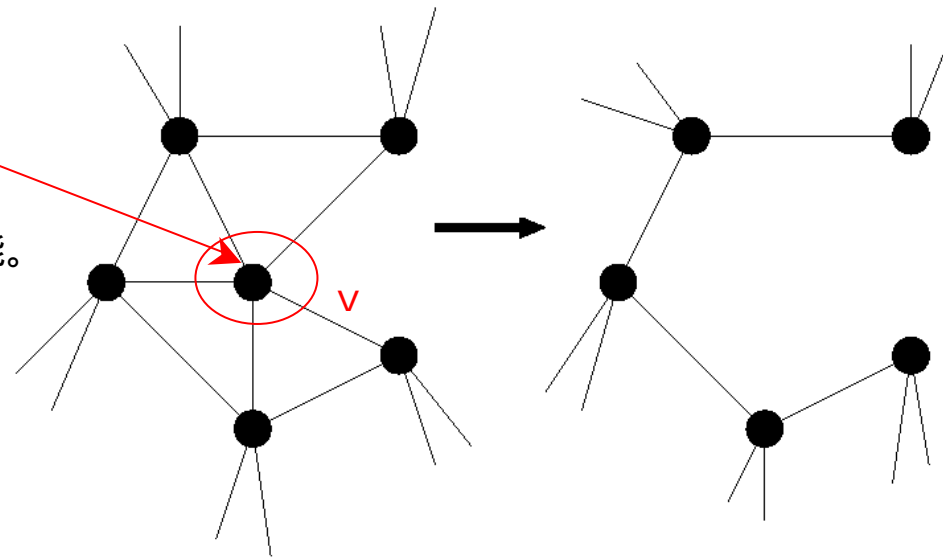
(証明)

$n-1$ 個の点をもつ全ての単純平面グラフは6彩色可能である」と仮定する

定理13 6より「全ての単純平面グラフには  
次数5以下の点がある」

点  $v$  を除去すると、 $n-1$ 個の点からなるグラフ  
ができあがるので、仮定より、これは6彩色可能。

点  $v$  を元に戻し、 $v$  に接続する5個以下の点  
以外の色で  $v$  を彩色すれば、 $n$ 点からなる  
グラフの6彩色が得られる



# 定理17.4

全ての単純平面グラフは5彩色可能である

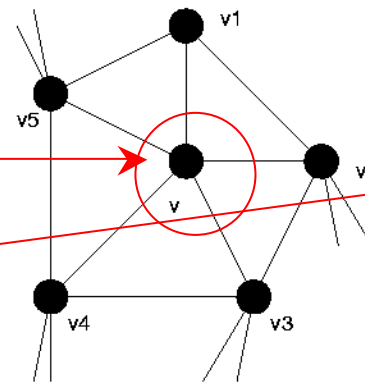
(証明)

$n-1$ 個以下の点をもつ全ての単純平面グラフは5彩色可能である」と仮定する

定理13.6より  $G$ には次数5以下の点がある

2本の辺  $vw_1$ ,  $vw_3$  を縮約する

点  $v$  に当てられた色で  $v_1$ ,  $v_3$  を彩色し  
点  $v$  を元々割り当てられた色以外で彩色しなおせば  
 $G$  の5彩色が完成する



仮定より 5彩色可能

