



Title	2005年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2005-11-18T08:53:31Z
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/771">http://hdl.handle.net/2115/771</a>
Rights(URL)	<a href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learningobject
Note(URL)	<a href="http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html">http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html</a> ; <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	GraphTheory05_slide11.pdf (第11回講義スライド)



[Instructions for use](#)



# グラフ理論 #11

第11回講義 7月4日

---

情報科学研究科 井上純一

[http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/)

# 有向グラフ：定義 性質 #1

弧集合：

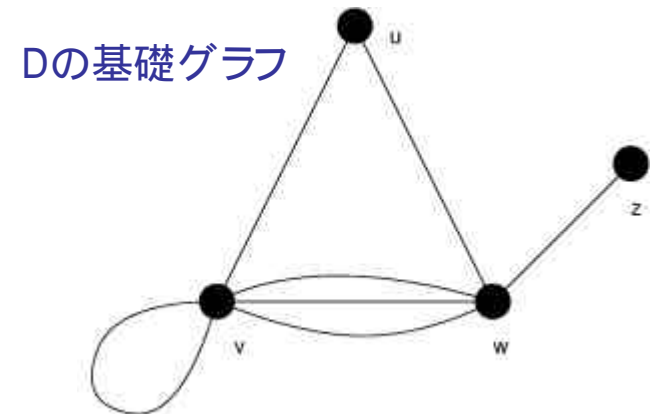
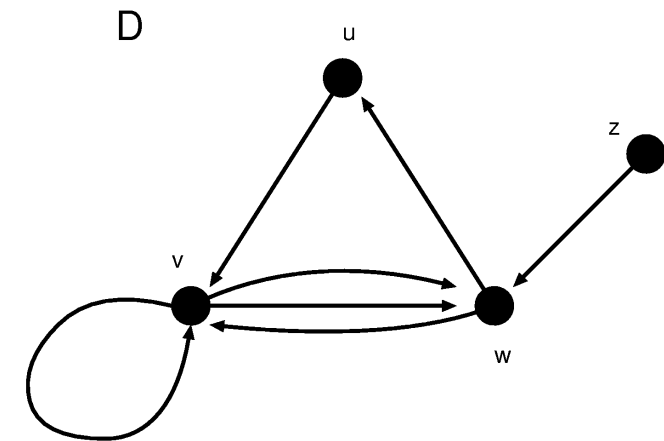
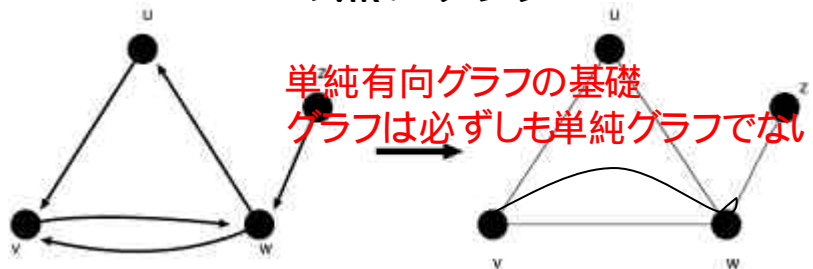
$A(D)$ ：点集合  $V(D)$  の元の順序対からなる有限族

$$A(D) = \{uw, vv, vw, vw, wv, wu, zw\}$$

有向グラフ：  $D: V(D)$  と  $A(D)$  からなるグラフ

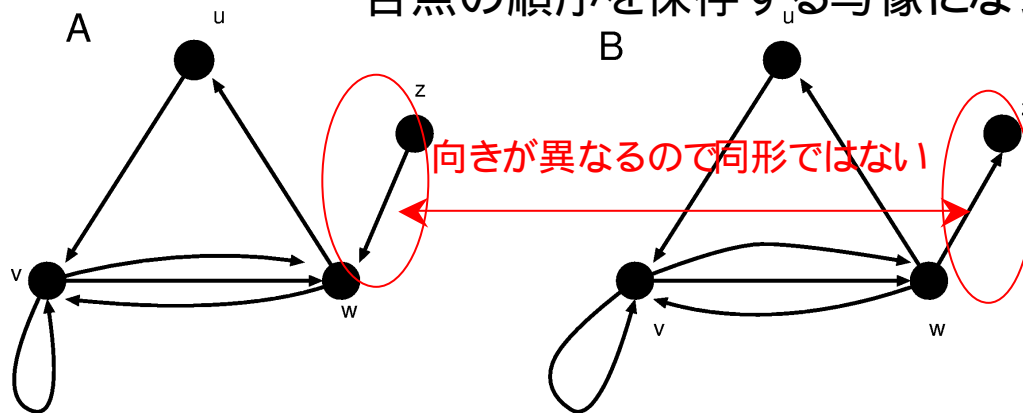
$D$  の基礎グラフ：有向グラフ  $D$  の矢印を取り除いたグラフ

単純有向グラフ：  $D$  の弧が全て異なり、ループの無いグラフ



# 有向グラフ：定義・性質 #2

有向グラフの同形：基本グラフの間に同形写像があり、各点の順序を保存する写像になっているとき



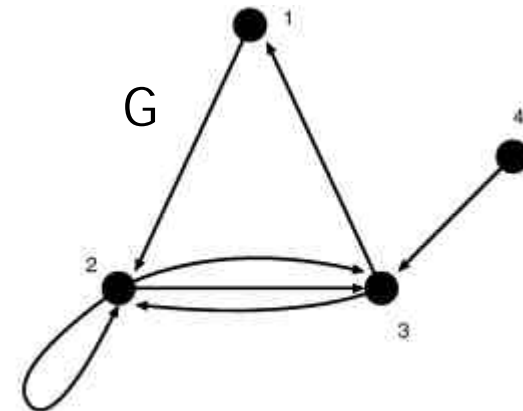
有向グラフの隣接行列：

$A = (a_{ij})$  : 要素  $a_{ij}$  が  $v_i$  から  $v_j$  への「弧」の本数を表す。

点数  $n$  のグラフに対して  $n \times n$  の行列

グラフ  $G$  の隣接行列  
対称ではない

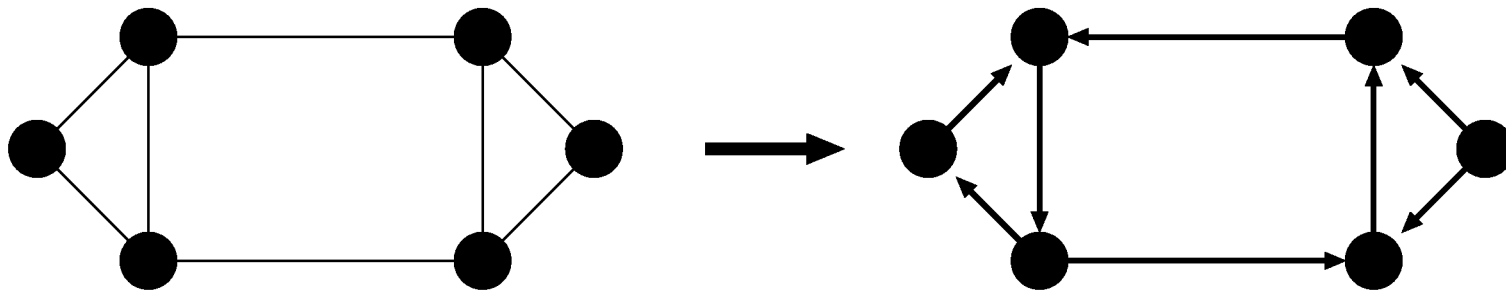
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



# 強連結と向き付け可能性

**強連結** : 任意の2点  $v, w$  の間に点  $v$  から点  $w$  への道がある

**向き付け可能** : グラフ $G$ の全ての辺を方向付けて強連結有向グラフが得られるとき



向き付け可能なグラフの一例

# 定理22・1とその証明

定理22・1

連結グラフGが向き付け可能であるための必要十分条件は、グラフGの各辺が少なくとも一つの閉路に含まれていることである

(証明)

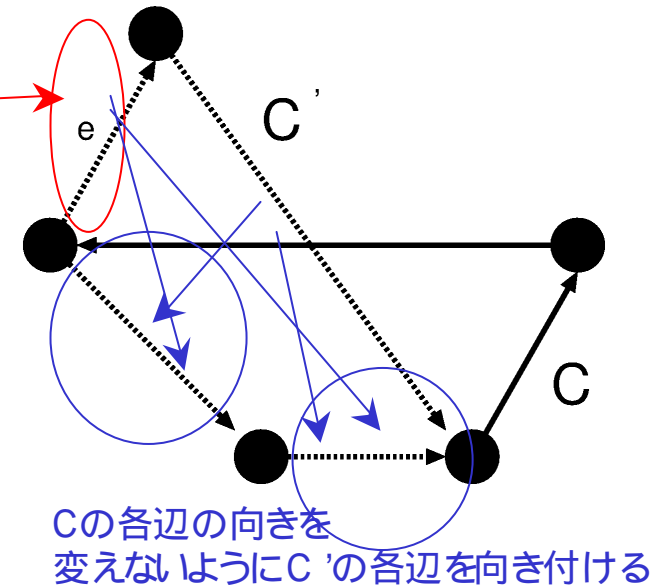
必要性はあきらかなので、十分性を示す。

閉路Cには含まれないが、Cの書く辺に隣接している辺eを選ぶ

「グラフGの各辺は少なくとも一つの閉路に含まれる」ので、辺eはC以外の閉路C'に含まれる

Cの各辺の向きを変えないように、C'の各辺を向き付ける

この操作を続けて、各ステップで少なくとも1つの辺を向き付けると、各ステップで有向グラフは強連結なので、グラフ全体を向き付けたのちにできるグラフは強連結である。



# オイラー有向グラフ

**オイラー有向グラフ**: 全ての弧を含む閉じた小道が存在する連結有向グラフ

入次数  $\text{indeg}(v)$ :  $vw$ の形をした有向グラフ  $D$ の弧数

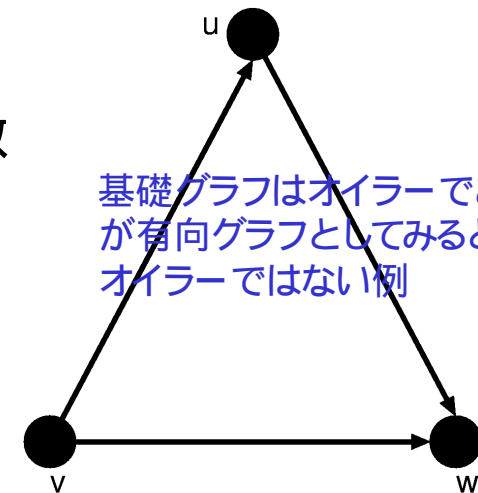
出次数  $\text{outdeg}(v)$ :  $wv$ の形をした有向グラフ  $D$ の弧数

## 握手有向補題

有向きグラフ  $D$ の全点について入次数の合計と出次数の合計は等しい

## 定理23.1

連結有向グラフ  $D$ がオイラーであるための必要十分条件は、 $D$ の各点で  $\text{outdeg}(v) = \text{indeg}(v)$  が成立することである。



基礎グラフはオイラーであるが有向グラフとしてみるとオイラーではない例

# ハミルトン有向グラフ

ハミルトン有向グラフ: 全ての点を含む閉路がある有向グラフ

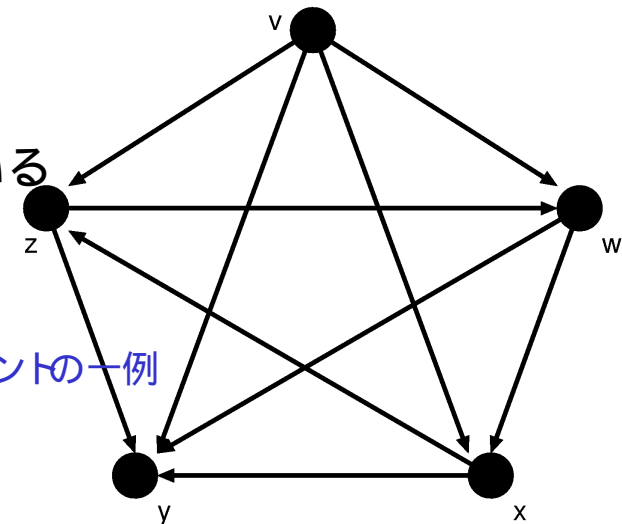
半ハミルトン有向グラフ: 全ての点を通る道がある有向グラフ

定理23.2

$D$ は強連結有向グラフであり、点が  $n$  個あるとする。各点  $v$  に対し  $\text{out deg}(v) \geq n/2$  かつ  $\text{indeg}(v) \geq n/2$  ならば  $D$ はハミルトン有向グラフである。

トーナメント: 任意の2点がちょうど1本の弧で結ばれている有向グラフ

トーナメントの一例





# 定理23 3

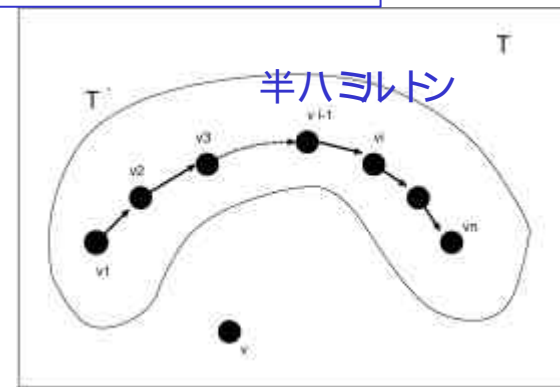
定理23 3

- (i) ハミルトンでないトーナメントは全て半ハミルトンである。
- (ii) 強連結なトーナメントは全てハミルトンである。

((i)の証明)

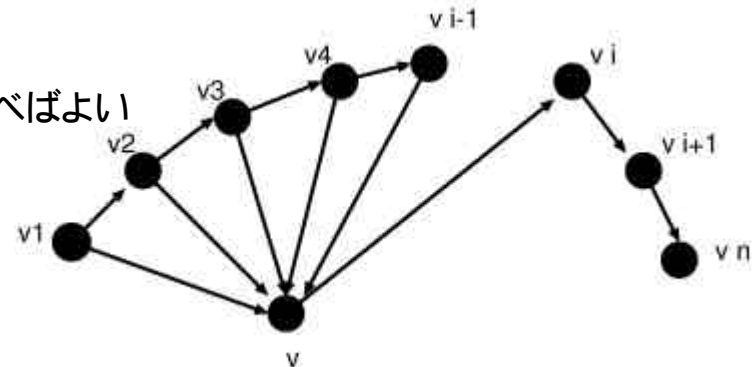
点 $n$ 個のトーナメントは全て半ハミルトンであると仮定する。  
図の $T'$ には $n$ 個の点があるので半ハミルトンである。

これに点 $v$ を加える状況 ( $T$ )を考える



- (1)  $v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$  が所望の道である。

- (2)  $v_1 v$  が $T$ の弧でなく  $v_1 v$  が $T$ の弧ならば、図のように点 $v_i$ を選べばよい



- (3)  $v_i$ の形をした弧が $T$ に無ければ

$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \rightarrow v$  が所望の道である。