



Title	2005年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2005-11-18T08:53:31Z
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/771">http://hdl.handle.net/2115/771</a>
Rights(URL)	<a href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learningobject
Note(URL)	<a href="http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html">http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html</a> ; <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	GraphTheory05_4.pdf (第4回講義ノート)



[Instructions for use](#)

# グラフ理論 配布資料 #4 (教科書 pp. 35 ~ 42 の内容)

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)

平成 17 年 5 月 9 日

## 目次

5 道と閉路	34
5.1 連結性	34
5.2 非連結化集合と分離集合	41
5.2.1 非連結化集合	41
5.2.2 分離集合	42

### 演習問題 3 の解答例

1.

(i) 次数 5 の正則グラフである二部グラフは図 42 のような完全二部グラフ  $K_{5,5}$  が挙げられる.

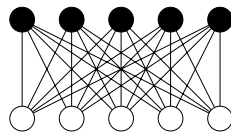


図 42: 次数 5 の正則グラフである二部グラフの例.

(ii) 二部グラフであるプラトングラフとしては, 図 43 のような立方体が挙げられる.

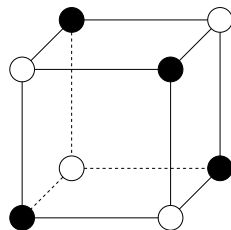


図 43: 二部グラフであるプラトングラフの一例.

(iii) 車輪である完全グラフは図 44 である.

(iv) まずは, 図 45 に点数が  $n = 4, 6, 8, 10, 12$  の場合の 3 次の正則グラフの例を載せる. ここで問われている問題は自然数列  $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (3, 3, \dots, 3)$  がグラフ的であるかどうか, を  $n = 11$  の場合に確かめ, グラフ的である場合には具体的にその図を描け, と言い直すことができる. この場合, 握手

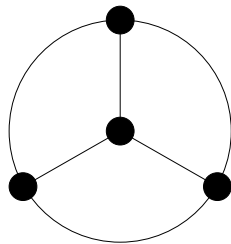


図 44: 車輪である完全グラフ.

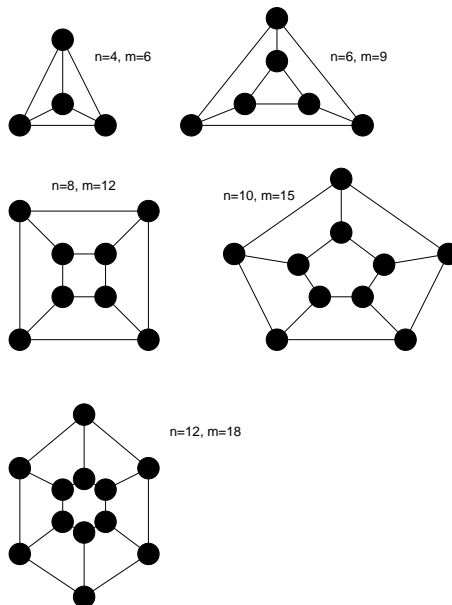


図 45: 点の数が  $n = 4, 6, 8, 10, 12$  の場合の正則グラフ. ちなみに,  $n = 10$  の場合には前に見た「ピータースン・グラフ」も当てはまる. この辺数は  $m = 15$  である.

捕題から, 点数  $n$ , 次数 3 のグラフの辺数  $m$  は

$$m = \frac{3n}{2} \tag{9}$$

である. ここで, これを図で確認してみると, 確かに成立していることがわかる. 辺の数は必ず整数でなければならないので, この式が成り立つためには  $n$  は偶数でなければならない. 従って,  $n = 11$  の場合には全ての点の次数が 3 であるような正則グラフは描けないことが結論つけられる.

(v) 次数 4 の正則グラフで  $K_5, K_{4,4}, Q_4$  以外のグラフとしては図 46 のような正 8 面体が挙げられる.

2.

- (1) まず, その補グラフが自己補対であることから, そのグラフおよび対応する補グラフの和 (グラフを 2 つ重ね合わせたもの) が完全グラフとなることに着目する. すると, 点数が  $n$  である完全グラフの辺数  $m$  が  $m = n(n - 1)/2$  であるから, 求めるグラフの辺数はこの半分, すなわち,  $n(n - 1)/4$  であることが必要である. 従って, 辺数は整数でなければならないので, 求めるグラフの点数  $n$  は  $k$  を整数として,  $n = 4k$  あるいは  $n - 1 = 4k$  でなければならない, すなわち, 求めるグラフが自己補対であるためには, 点の数  $n$  が  $n = 4k$  か  $n = 4k + 1$  であることが必要である.  $k = 1$  とした場合,  $n = 4$

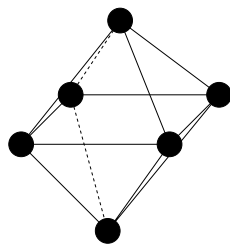


図 46: 次数 4 の正則グラフである正 8 面体.

または  $n = 5$  となるが、このときの自己補対グラフを具体的に求めよ、というのがここでの問題である。そこで、まず  $n = 4$  の場合について考えてみると、各点の次数は孤立点が生じてはならないわけであるから、1, 2 に限られることに注意する。次数 1 の点の個数を  $L$ 、次数 2 の点の個数を  $M$  とすれば、正の整数  $L, M$  は次の等式を見たさなければならない。

$$L + 2M = 6 \tag{10}$$

$$L + M = 4 \tag{11}$$

これを満たす組み合わせとしては  $(L, M) = (2, 2)$  であり、求める自己補対であるグラフの次数列は  $(1, 1, 2, 2)$  のみであることがわかる。これを満たすグラフとしては図 47 の左図実線が挙げられる（これのみ）。

同様にして、 $n = 5$  の場合に対し、各点の次数は 1, 2 または 3 であるから、このそれぞれの次数を持つ点の数を  $L, M$  及び  $N$  とすれば、次の等式：

$$L + 2M + 3N = 10 \tag{12}$$

$$L + M + N = 5 \tag{13}$$

が成り立つ。これを満たす解は  $(M, L, N) = (1, 3, 1), (2, 1, 2)$  の 2 つであるので、可能な自己補対グラフの次数列としては  $(3, 2, 2, 2, 1)$  あるいは  $(3, 3, 2, 1, 1)$  であるが、前者では自己補対グラフは実際には描けず、後者に関しては図 47 の右図実線（これのみ）が対応する。

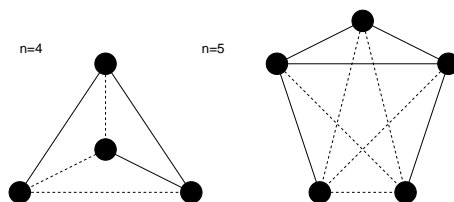


図 47: 点の数が 4, または 5 であるような自己補対グラフ。点線で描かれたグラフがそれぞれの補グラフを表す。

(2) 前に得た必要条件の式で  $k = 2$  と置くと  $n = 8$  が得られるので、8 点からなる自己補対グラフを一つ見つけよう。この際、次のようなアルゴリズム (I)-(IV) を用いて所望のグラフを見つけることにしよう。

- (I) 図 48 のように 8 個の点,  $1, \dots, 8$  を時計回りに並べる。
- (II) 8 個の点の中で奇数番目の点  $(1, 3, 5, 7)$  に関して完全グラフを作る（自分以外の点全てと各々 1 本の辺で結ばれる）。
- (III) 奇数番目の点のそれぞれと、その点に 1 を加えた偶数番目の点（例えば、点 1 ならば点 2、点 3 ならば点 4）を結ぶ。この時点で辺の数は 10 であり、8 個の点全てがつながった連結グラフが出来上がる。従って、自己補対グラフを作るためにはあと  $14 - 10 = 4$  本の辺を付け足せばよい。

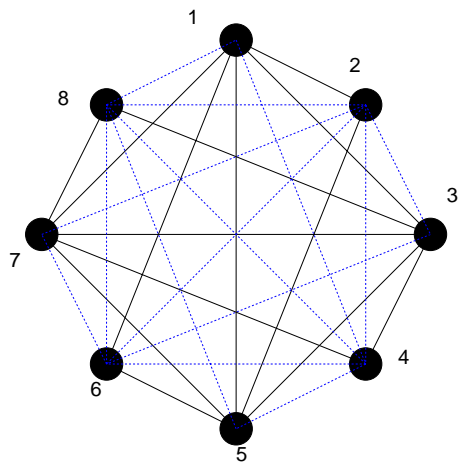


図 48: ここで得られる自己補対グラフ (実線) とその同形グラフ (破線). 自己補対の定義より, 実線と破線を足したものが 8 次の完全グラフ  $K_8$  となることに注意.

(IV) 最後のステップとして, 偶数番目の各点と, その点の番号プラス 3 に相当する番号の点を結ぶ (点 2 と点 5 を, 点 8 は  $8 + 3 = 11$  であるが,  $11 - 8 = 2$  であるから, 点 8 と点 2 を結ぶことと約束する). この操作 (I)-(IV) で計 14 本の辺からなるグラフができるが, その作り方から明らかに, これ (図 48 の実線) と奇数番目の点の持つ役割と偶数番目の点の持つ役割を交換してでき上がるグラフ (図 48 の破線図) は互いに同形なので (お互いを足すと完全グラフができ上がる), これらのグラフ (図 48 の実線, 破線) が互いに自己補対となることは明らかである.

## 5 道と閉路

ここでは, 「道」及び「閉路」に関し, その概念・諸定理, 及び, 応用例をいくつかの具体例をあげて説明する. なお, 教科書 p. 52 「アルゴリズム」は, この講義では触れず, 情報工学演習 II(B) の時間に関連する問題を解くことにより補うことにする.

### 5.1 連結性

連結：グラフの各 2 点の間に道がある.

歩道： $v_i (i = 1, \dots, m) \in G$  に対し, 辺列  $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{m-1}v_m$  を歩道 (walk) という.

⇒ 別の表現： $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$  ( $v_0$  : 始点,  $v_m$  : 終点)

小道：全ての辺  $v_0v_1, \dots, v_{m-1}v_m$  が異なる歩道

道：点  $v_0, v_1, \dots, v_m$  が全て異なる歩道 ( $v_0 = v_m$  であっても良いとする)

閉路：少なくとも 1 本辺を持つ閉じた道

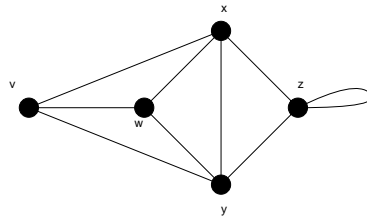


図 49: このグラフにおいて、閉路は  $x \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x$

例題 7

連結単純グラフ  $G$  の点集合は  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  であり,  $m$  本の辺および  $t$  個の三角形があるとする. 以下の (1) ~ (3) に答えよ.

- (1)  $G$  の隣接行列を  $A$  とすると, 行列  $A^2$  の  $ij$  要素は  $v_i$  と  $v_j$  間の長さ 2 の歩道の個数に等しいことを示せ.
- (2) 行列  $A^2$  の対角要素の総和は  $2m$  であることを示せ.
- (3) 行列  $A^3$  の対角要素の総和は  $6t$  であることを示せ.

(解答例)

(1) 連結グラフ  $G$  に関する  $n \times n$  の隣接行列を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{14}$$

と置くと隣接行列の自乗  $A^2$  は

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk}a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{nk}a_{kn} \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \equiv B \end{aligned} \tag{15}$$

と書け,  $A^2$  の  $ij$  要素である  $b_{ij}$  は

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj} \tag{16}$$

である. ところで, 隣接行列の定義から  $a_{ik}$  は点  $v_i$  と点  $v_k$  を結ぶ辺の本数,  $a_{kj}$  は点  $v_k$  と点  $v_j$  を結ぶ辺の本数であるから, 積  $a_{ik}a_{kj}$  は点  $v_i$  から点  $v_k$  を経由して点  $v_j$  に至る長さ 2 の歩道の数に相当する (図 50 参照). 経由点  $v_k (k = 1, \dots, n)$  の選び方の可能性 ( $i = k, j = k$  の場合には「ループ」があると考え) に関し, この積  $a_{ik}a_{kj}$  を足し上げた

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj} = b_{ij} \tag{17}$$

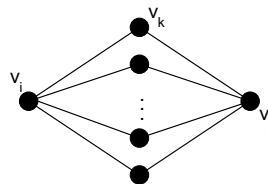


図 50: 点  $v_k$  は点  $v_i$  から点  $v_j$  へ至る経由点.

は  $v_i$  から  $v_j$  へ至る長さ 2 の歩道の数である. すなわち,  $A^2$  の  $ij$  要素  $b_{ij}$  は  $v_i$  から  $v_j$  へ至る長さ 2 の歩道の数に等しい.

(2) (1) の結果を考慮すると, 行列  $B = A^2$  の対角成分

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{ki} \tag{18}$$

は点  $v_i$  から点  $v_k$  を経由して  $v_i$  へ戻る長さ 2 の歩道の数であるから, これは  $v_i$  と  $v_k$  を結ぶ辺の数の 2 倍になっている (図 51 参照). 従って, 行列  $A^2$  の対角和

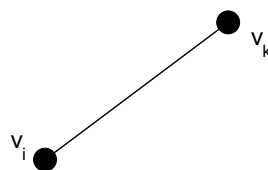


図 51: 中継点  $v_k$  を経て,  $v_i$  へ戻る経路.

$$\sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{ki} \tag{19}$$

は連結グラフ  $G$  に含まれる辺の本数の 2 倍, すなわち  $2m$  である.

(3)  $A^3$  を計算すると

$$\begin{aligned} A^3 &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{1k}a_{kl}a_{l1} & \cdots & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{1k}a_{kl}a_{ln} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{nk}a_{kl}a_{l1} & \cdots & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{nk}a_{kl}a_{ln} \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = C \end{aligned} \tag{20}$$

であるから,  $A^3$  の  $ij$  成分は

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik}a_{kl}a_{lj} \tag{21}$$

と書ける.

ところで, 隣接行列の定義から  $a_{ik}$  は点  $v_i$  と点  $v_k$  間の辺の本数,  $a_{kl}$  は点  $v_k$  と点  $v_l$  間の辺の本数,  $a_{lj}$  は点  $v_l$  と点  $v_j$  間の辺の本数であるから, これらの積  $a_{ik}a_{kl}a_{lj}$  は点  $v_i$  から点  $v_k$  及び点  $v_l$  を経由して点  $v_j$  へ至る歩道の数である. 従って, 経由点  $\{v_k, v_l\}$  の可能性について足し合わせた

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik}a_{kl}a_{lj} = c_{ij} \tag{22}$$

つまり, 行列  $A^3$  の  $ij$  要素は点  $v_i$  から点  $v_j$  へ至る長さ 3 の歩道の数に等しい (図 52 参照). また,

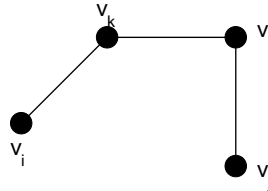


図 52: 点  $v_i$  から経由点  $\{v_k, v_l\}$  を経て  $v_j$  へと至る経路.

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik}a_{kl}a_{li} \tag{23}$$

は点  $v_i$  から点  $v_k$  及び点  $v_l$  を経由して  $v_i$  へ至る長さ 3 の閉路の数であるから. これは点  $v_i, v_k$  及び点  $v_l$  を結ぶ三角形の数である. 従って, これを経由点  $\{v_k, v_l\}$  の可能性について足し上げた

$$\sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik}a_{kl}a_{li} \tag{24}$$

は連結グラフ  $G$  に含まれる三角形の個数の 6 倍 ( $i, k, l$  の並べ方  $3! = 6$  通りに縮退) に等しい (図 53 参照). すなわち

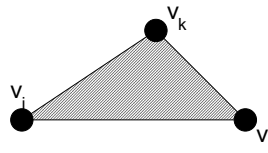


図 53: 点  $v_i$  を出発し, 点  $\{v_k, v_l\}$  を経て点  $v_i$  へと戻る閉路は三角形を形成する.

$$\sum_{i=1}^n c_{ii} = 6t \tag{25}$$

に等しい.

**定理 5.1**  
 グラフ  $G$  が二部グラフであるとき, 閉路は全て偶数長である.



証明は教科書 p. 37 を参照のこと (この講義では触れない).

### 定理 5.2

グラフ  $G$  は  $n$  個の点を持つ単純グラフであるとする.  $G$  には  $k$  個の成分があるとき,  $G$  の辺の本数  $m$  は次式を満たす.

$$n - k \leq m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1) \quad (26)$$

(証明)

まず, (26) における下界を表す不等式:  $m \geq n - k$  について示す. 空グラフ  $m = 0$  のときは自明であり,  $n = k$  より,  $0 \leq 0 - 0 = 0$  で成立する. 従って, 以下ではこの場合を除外して考える. 方針としては, 辺数が  $m_0 - 1$  のときに不等式の成立を仮定し,  $m_0$  のときの成立を示すという数学的帰納法により証明することにしよう.

このために, 単純グラフ  $G$  から任意の辺を 1 本削除した場合, 成分数, 点数, 辺数はどのように変化するかを考察すると

$$\text{成分数: } k \rightarrow k + 1$$

$$\text{点数: } n \rightarrow n$$

$$\text{辺数: } m_0 \rightarrow m_0 - 1$$

となるから, 上の矢印の右側のそれぞれの量  $(k + 1, n, m_0 - 1)$  に関して不等式を作ると

$$m_0 - 1 \geq n - (k - 1)$$

が成立する. 従って, この辺数  $m_0 - 1$  に関する不等式の成立を仮定し, これから辺数  $m_0$  についての不等式の成立を導けばよいわけであるが, これは上不等式を書き直せば直ちに

$$m_0 \geq n - k$$

が得られるので, 帰納法により, 全ての  $m$  に対して不等式:  $m \geq n - k$  の成立が示された.

次に, (26) の上界を示す不等式:  $m \leq (n - k)(n - k + 1)/2$  についての成立を示す. 辺の数の上界を考えるわけであるから, グラフ  $G$  を成分数が  $k$  のグラフで, 辺の数が一番多いものとすれば, このグラフ  $G$  の各成分は完全グラフであるとしてよい. そこで, この成分の中で任意の 2 成分  $C_i, C_j$  を選び,  $C_i$  には  $n_i$  個,  $C_j$  には  $n_j$  個の点があったとする ( $n_i \geq n_j$ ). つまり,  $C_i + C_j$  の辺の総数  $\mathcal{N}_{ij}$  はそれぞれが完全グラフであることを考慮すると (図 54 を参照).

$$\mathcal{N}_{ij} = \frac{1}{2}n_i(n_i - 1) + \frac{1}{2}n_j(n_j - 1) \quad (27)$$

となる. さて, ここで次の操作を考える.

(操作)

$C_i \Rightarrow n_i + 1$  個の点を持つ完全グラフ

$C_j \Rightarrow n_j - 1$  個の点を持つ完全グラフ

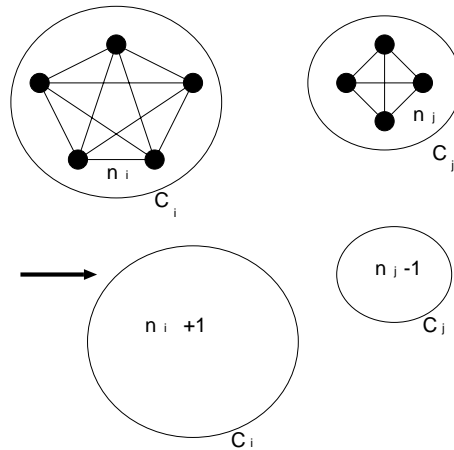


図 54: 完全グラフ  $C_i$  に点の一つ足して完全グラフを作り, 完全グラフ  $C_j$  から点の一つ引き, 完全グラフを作る.

この置き換えにより,  $C_i + C_j$  の点数は不変であるが, 辺数  $\mathcal{N}'_{ij}$  は

$$\mathcal{N}'_{ij} = \frac{1}{2}n_i(n_i + 1) + \frac{1}{2}(n_j - 1)(n_j - 2) \tag{28}$$

のように変化する. 従って, この (操作) により, 辺の数は

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{N}_{ij} &= \mathcal{N}'_{ij} - \mathcal{N}_{ij} \\ &= \frac{1}{2}n_i(n_i + 1) + \frac{1}{2}(n_j - 1)(n_j - 2) - \left\{ \frac{1}{2}n_i(n_i - 1) + \frac{1}{2}n_j(n_j + 1) \right\} \\ &= n_i - n_j + 1 > 0 \end{aligned} \tag{29}$$

だけ増加する.

この議論を進めると, 結局, 成分数が  $k$  であるグラフで最も辺数が多いグラフ  $G$  は点の数が  $n - (k - 1) = n - k + 1$  個の完全グラフと  $k - 1$  個の孤立点 (空グラフ) からなるグラフであると結論付けられるので, 辺数  $m$  の上限は不等式:

$$m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1) \tag{30}$$

を満たすことがわかる (証明終わり).

**例題 8**

連結グラフにおいて, 点  $v$  から  $w$  への距離  $d(v, w)$  は  $v$  から  $w$  への最短路の長さである. このとき, 以下の問い (1)(2) に答えよ.

(1)  $d(v, w) \geq 2$  ならば

$$d(v, z) + d(z, w) = d(v, w) \tag{31}$$

なる点  $z$  が存在することを示せ.

(2) ピーターソン・グラフ (例えば教科書 p. 23 図 3.4 参照) において, 任意の異なる 2 点  $v$  と  $w$  に対して  $d(v, w) = 1$  または  $d(v, w) = 2$  であることを示せ.

(解答例)

(1) 図 55 のような状況を考える. 点  $v$  から  $w$  への最短路を  $C$  とする.  $C$  の全長は  $d(v, w)$  である. この経

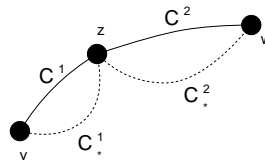


図 55:  $v \rightarrow z \rightarrow w$  の経路  $C = C^1 + C^2$  は  $v$  から  $w$  への最短路であり, その長さは  $d(v, w)$  で与えられる.

路  $C$  上に任意の点  $z$  をとり, この点  $z$  を中継点として経路  $C$  を 2 つの部分に分けて, 部分路  $v \rightarrow z$  を  $C^1$ , 部分路  $z \rightarrow w$  を  $C^2$  とする.

この点  $z$  に対し,  $C^1$  は  $v$  と  $z$  を結ぶ全ての経路のうちで最短路である. なぜならば, もし  $v$  と  $z$  を結ぶ別の経路の中で  $C^1$  よりも短いものが存在するとすれば, その経路  $C_*^1$  と  $C^2$  を合わせた新しい経路  $C_*^1 + C^2$  が  $v$  と  $w$  を結ぶ全ての経路の中で最短となり, 仮定に反する. 従って, 経路  $C^1$  が点  $v$  と  $z$  を結ぶ全ての経路の中で最短であり,  $C^1$  の全長が  $d(v, z)$  である.

次に,  $z$  と  $w$  を結ぶ経路の中で最短のものであるが, これが  $C^2$  であることは明らかである. なぜならば, この経路と別な経路  $C_*^2$  が存在するとすれば,  $C^1$  と  $C_*^2$  を足し合わせた経路  $C^1 + C_*^2$  が  $v$  と  $w$  を結ぶ全経路の中で最短となり, 仮定に反する. 従って,  $C^2$  が  $z$  と  $w$  を結ぶ全経路のうちで最短であり, その全長は  $d(z, w)$  である. 従って, 考えるグラフは連結であるから, 経路  $C$  上に中継点  $z$  をいつでも任意にとることができる. この点  $z$  に対して

$$d(v, z) + d(z, w) = d(v, w) \tag{32}$$

が成り立つ.

(2) 図 56 のように, ピーターソン・グラフの各点に番号を付ける. ピーターソン・グラフの対称性から, 点

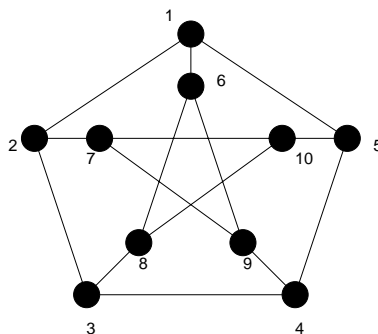


図 56: ピーターソン・グラフ

1, 6 をスタート地点に選んだ場合の各他点への最短路を考えれば十分である (括弧内は長さ  $d$  を与える経路).

$$d(1, 2) = 1 \quad (1 \rightarrow 2)$$

$$\begin{aligned}
d(1,3) &= 2 \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) \\
d(1,4) &= 2 \quad (1 \rightarrow 5 \rightarrow 4) \\
d(1,5) &= 1 \quad (1 \rightarrow 5) \\
d(1,6) &= 1 \quad (1 \rightarrow 6) \\
d(1,7) &= 2 \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 7) \\
d(1,8) &= 2 \quad (1 \rightarrow 6 \rightarrow 8) \\
d(1,9) &= 2 \quad (1 \rightarrow 6 \rightarrow 9) \\
d(1,10) &= 2 \quad (1 \rightarrow 5 \rightarrow 10) \\
d(6,1) &= 1 \quad (6 \rightarrow 1) \\
d(6,2) &= 2 \quad (6 \rightarrow 1 \rightarrow 2) \\
d(6,3) &= 2 \quad (6 \rightarrow 8 \rightarrow 3) \\
d(6,4) &= 2 \quad (6 \rightarrow 9 \rightarrow 4) \\
d(6,5) &= 2 \quad (6 \rightarrow 1 \rightarrow 5) \\
d(6,7) &= 2 \quad (6 \rightarrow 9 \rightarrow 7) \\
d(6,8) &= 1 \quad (6 \rightarrow 8) \\
d(6,9) &= 1 \quad (6 \rightarrow 9) \\
d(6,10) &= 2 \quad (6 \rightarrow 8 \rightarrow 10)
\end{aligned}$$

以上より、ピーターソン・グラフの任意の 2 点  $v, w$  に対して  $d(v, w) = 1$  または  $d(v, w) = 2$  であることが示せた。

## 5.2 非連結化集合と分離集合

ある連結グラフを「どの程度つながったグラフであるか」という観点から調べる際、「そのグラフから何本の辺を取り去ったら非連結グラフになるか?」「そのグラフから何個の点を取り去ったら非連結グラフになるか?」という指標を用いることが多い。前者を非連結化集合 (disconnecting set)、後者を分離集合 (separating set) と呼ぶ。ここではそれぞれを例を取りあえて見てゆくことにしよう。

### 5.2.1 非連結化集合

非連結化集合：それを除去するとグラフが非連結となる辺の集合。

カットセット：そのどのような真部分集合も非連結化集合でない、非連結化集合<sup>1</sup>。図 57 の非連結化集合  $\{e_1, e_6, e_7, e_8\}$  はカットセットでもある。

辺連結度 (edge-connectivity)  $\lambda(G)$ ：連結グラフ  $G$  の最小なカットセットの大きさ。図のグラフでは  $\lambda(G) = 2$  である。

$\lambda(G) \geq k$  のとき、グラフ  $G$  は  $k$ -辺連結であるという。

<sup>1</sup> 「それを除去するとグラフの成分数が増える辺の集合」として定義し直せば、「非連結化集合」、「カットセット」はそれぞれ非連結グラフにも適用できる概念であることに注意しよう。

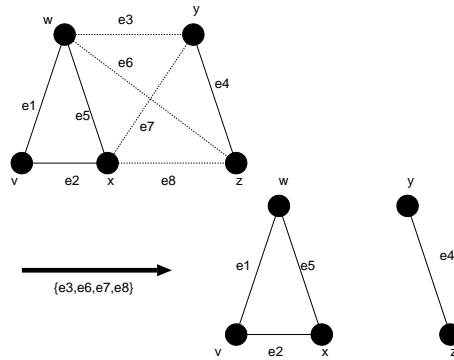


図 57: カットセット  $\{e_3, e_6, e_7, e_8\}$  を選ぶと図のような非連結グラフが得られる.

### 5.2.2 分離集合

分離集合：それを除去するとグラフが非連結となる点の集合 (辺を除去するときにはその接続辺も除去することに注意).

カット点：1 個の点だけからなる分離集合.

連結度  $\kappa(G)$ <sup>2</sup>：グラフ G の最小な分離集合の大きさ.

$\kappa(G) \geq k$  のとき、グラフ G は  $k$ -連結であるという.

(注)

連結度  $\kappa(G)$  とは通信系のネットワーク (インターネットを思い出して頂ければよいと思います) を構築する際に便利な量である. つまり、グラフの各点を「交換局」あるいは「サーバ」とすれば、そのグラフ (ネットワーク) G の連結度が  $\kappa(G)$  であるということは、 $\kappa(G)$  未満の交換局 (サーバ) が故障しても、残りの交換局 (サーバ) の連結性が保障されていることになる.

⇒ 連結度  $\kappa(G)$  はネットワークの信頼度を反映し、 $\kappa(G)$  が大きなネットワークほど、その信頼性が高い.

一方、前出の「辺連結度」 $\lambda(G)$  をこのネットワークに当てはめて考えれば、 $\lambda(G)$  未満の伝送路が故障しても、交換局 (サーバ) の連結性が保障されていることになるので、 $\lambda(G)$  も一つのネットワークの信頼度の尺度として用いることができる.

<sup>2</sup> この連結度は、前出の辺連結度と区別するために「点連結度」と呼ばれることもある.

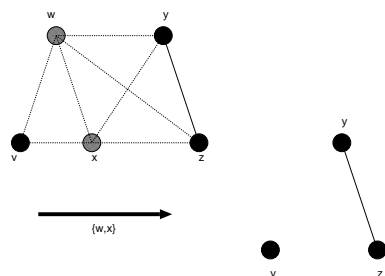


図 58: 分離集合  $\{w, x\}$  によってできる非連結グラフ.

例題 9

図 59 に与えられたグラフ  $G$  について以下の問い (1) ~ (5) に答えよ.

- (1)  $G$  の非連結化集合を一つ挙げよ.
- (2)  $G$  のカットセットを一つ挙げよ.
- (3)  $G$  の橋を挙げよ.
- (4)  $G$  の分離集合を一つ挙げよ.
- (5)  $G$  のカット点を一つ挙げよ.

(解答例)

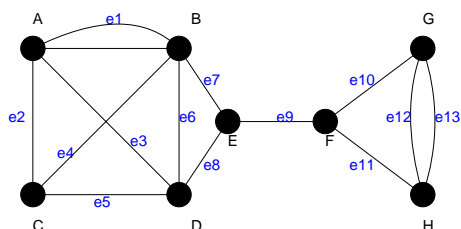


図 59: 問題文に与えられたグラフ  $G$ .

- (1) グラフ  $G$  の非連結化集合は例えば,  $\{e_7, e_8\}$ ,  $\{e_{10}, e_{11}\}$ ,  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  などである.
- (2) グラフ  $G$  のカットセットは例えば,  $\{e_7, e_8\}$ ,  $\{e_{10}, e_{11}\}$ ,  $\{e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}\}$  などである.  
(カットセット)  $\subseteq$  (非連結化集合) であることに注意.
- (3) グラフ  $G$  の橋は  $e_9$  である.
- (4) グラフ  $G$  の分離集合は  $\{B, D, E\}$  などである.
- (5) グラフ  $G$  のカット点は  $E, F$  である.

例題 10

前回の講義では隣接行列, 接続行列と呼ばれる行列を用いてグラフを表現する方法を学んだが, これら 2 つの行列の他にもグラフを表現するための行列は存在し, それらを用いることにより, より有効にグラフについての考察を進めることができる. ここでは, そのような行列であるタイセット行列, 及び, カットセット行列についての演習問題を解くことにより, これら行列に関する理解を深めることにしよう.

無向グラフ  $G$  のタイセット行列 (tie-set matrix)  $B$  とは, 各行が  $G$  の閉路  $L_i$  に, 各列  $j$  が枝  $j \in E(G)$  に対応し, 行列要素  $b_{ij}$  が

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & (L_i \text{ が枝 } j \text{ を含む}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (33)$$

と表される行列である.

一方, グラフ  $G$  のカットセット行列 (cut-set matrix)  $C$  とは, 各行  $i$  が  $G$  のカットセット  $C_i$  に, 各列  $j$  が枝  $j \in E(G)$  に対応し, 各行列要素がそれぞれ

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & (C_i \text{ が枝 } j \text{ を含む}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (34)$$

で与えられる. 例えば, 図 60 のグラフ  $G$  においては, タイセット行列, カットセット行列はそれぞれ

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

となる. これを踏まえて以下の問いに答えよ.

- (1) 図 61 のグラフ  $G$  の閉路を全て求めよ (それぞれに  $L_1, L_2, \dots$  のようなラベルを付けよ).
- (2) グラフ  $G$  のカットセットを全て求めよ (それぞれに  $C_1, C_2, \dots$  のようなラベルを付けよ).
- (3) グラフ  $G$  のタイセット行列  $B$  を求めよ.
- (4) グラフ  $G$  のカットセット行列  $C$  を求めよ.
- (3) タイセット行列  $B$  とカットセット行列  $C$  の間に次の関係式が成り立つことを示せ.

$$BC^T \equiv \mathbf{0} \pmod{2} \quad (36)$$

ただし,  $C^T$  は行列  $C$  の転置行列を表し,  $\mathbf{0}$  は全ての成分がゼロである行列として定義される.

(解答例)

- (1) (2) 図 62 を参照のこと.
- (3) 閉路行列の列の増える方向に  $L_1, L_2, L_3$ , 行の増える方向に辺の番号  $1, 2, \dots, 5$  のようにラベル付けす

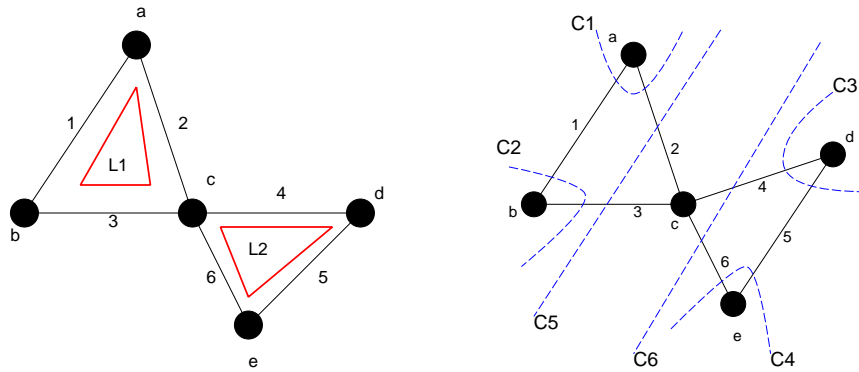


図 60: グラフ G の閉路 (左) とカットセット (右).

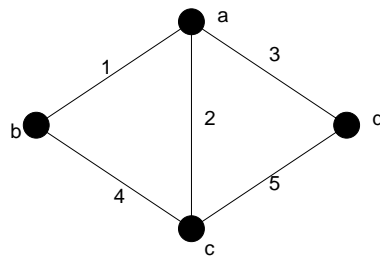


図 61: 問題のグラフ G.

るように決めると行列  $B$  は

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{37}$$

となる.

- (4) カットセット行列の列の増える方向にカットセットの番号  $C_1, C_2, \dots, C_6$ , 行の増える方向に辺の番号  $1, 2, \dots, 6$  を割り振ることに決めれば, 行列  $C$  は

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{38}$$

となる.



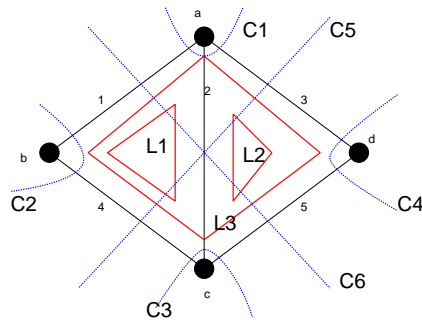


図 62: 問題のグラフ及び, 閉路  $L_1, L_2, L_3$ , そして, カットセット  $C_1, C_2, \dots, C_6$ .

(5) 両行列の積  $BC^T$  を作ると

$$\begin{aligned}
 BC^T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 & 1+1 & 0 & 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 0 & 1+1 & 1+1 & 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 & 1+1 & 1+1 & 1+1 & 1+1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \pmod{2} \tag{39}
 \end{aligned}$$

となり, 題意が満たされる.

**演習問題 4**

1. 完全グラフ  $K_3$  に関し, その各点がサーバに対応し,  $K_3$  のつながり方をした「ネットワーク」をなしているものとする. このネットワークの各辺が確率  $q$  で断線する場合, グラフが依然として連結グラフである場合に限り, このネットワークは正常に機能することがわかっている. このとき, このネットワークが正常である確率 (ネットワークの信頼度)  $R$  を  $p$  の関数として求め, 図示せよ.
2. 今回の講義で学んだ「閉路」「カットセット」に関して以下の問いに答えよ.
  - (1) グラフの中に辺  $e$  を含む閉路が 2 つある場合,  $e$  を含まない閉路があることを例を挙げて示せ.
  - (2) グラフの中に辺  $e$  を含むカットセットが 2 つある場合,  $e$  を含まないカットセットがあることを例を挙げて示せ.