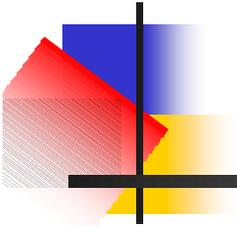




Title	2005年度 情報理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2005-11-18T09:19:52Z
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/772
Rights(URL)	http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learningobject
Note(URL)	http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html ; http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	InfoTheory05_slide2.pdf (第2回講義スライド)



[Instructions for use](#)



情報理論 #2

第2回講義 4月25日

情報科学研究科 井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

情報量とは何か？

前回の復習

情報量： $-\log p$ $p(E) = p$ はある事象Eが起こる確率

抽象的概念である「情報」の量の数学的な定義

例1) 明日の天気に関し $p(\text{晴れ})=p(\text{雨})=1/2$ の場合、「明日は晴れ」という通報を受けた場合に得られる情報量

$$-\log p(\text{晴れ}) = \log 2 = 1(\text{ビット})$$

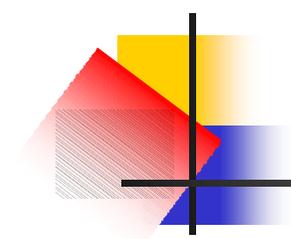
例2) 犬が人間に噛みつ〈確率〉 $p(\text{犬} \rightarrow \text{人間})=2^{-3}$ 、「人間が犬に噛みつ〈確率〉 $p(\text{人間} \rightarrow \text{犬})=2^{-1000}$

犬が人間に噛みついた」という通報を受けた際に得られる情報量 $-\log p(\text{犬} \rightarrow \text{人間}) = 3(\text{ビット})$

人間が犬に噛みついた」という通報を受けた際に得られる情報量 $-\log(\text{人間} \rightarrow \text{犬}) = 1000(\text{ビット})$

めったに起こらない事象に対する情報量は大きい

情報量とはある通報で我々が驚く度合いを表している



エントロピー

1つのコイン投げを考える

$$p(\text{表}) = \frac{1}{2} \quad \text{表が出たことを知って得られる情報量}$$

$$-\log p(\text{表}) = -\log 2^{-1} = 1(\text{ビット})$$

$$p(\text{裏}) = \frac{1}{2} \quad \text{裏が出たことを知って得られる情報量}$$

$$-\log p(\text{裏}) = -\log 2^{-1} = 1(\text{ビット})$$

実際にコインを投げる際にどの程度の**情報量の増加**が期待できるか？

$$H = - \sum_{i=\text{表,裏}} p(i) \log p(i) = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = 1(\text{ビット})$$

エントロピー、あるいは平均情報量と呼ぶ

表、裏のどちらが出るかが予めわかっている場合 $p(\text{表}) = 1$, or, $p(\text{裏}) = 1$

エントロピーはゼロ

エントロピーの定義と性質

ある事象の集合を $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ とし $P_X(x)$ を $x \in A$ なる事象が生起される確率とすると、確率変数 X のエントロピーは

$$H = - \sum_{x \in A} P_X(x) \log P_X(x) \quad \text{で与えられる}$$

エントロピーの定義

エントロピーの性質

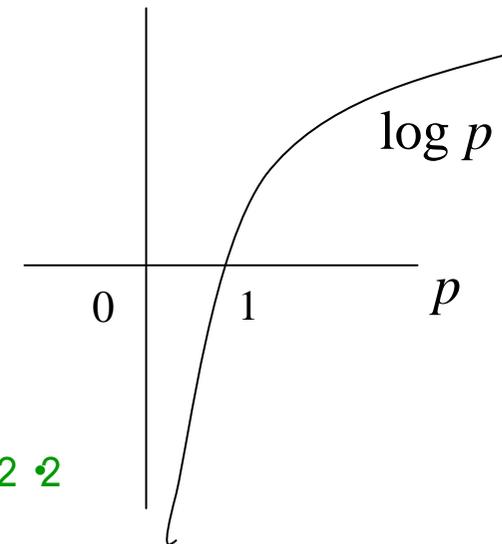
(1) $H(x) \geq 0$

(2) $P(x) = 1$ となる $x \in A$ があれば $H(x) = 0$

エントロピーは確率変数 X に関する我々の知識のあいまいさを表す

(3) $0 < P(x) < 1$ なる $x \in A$ があれば $H(x) > 0$

具体例は教科書 p. 15、例2・2

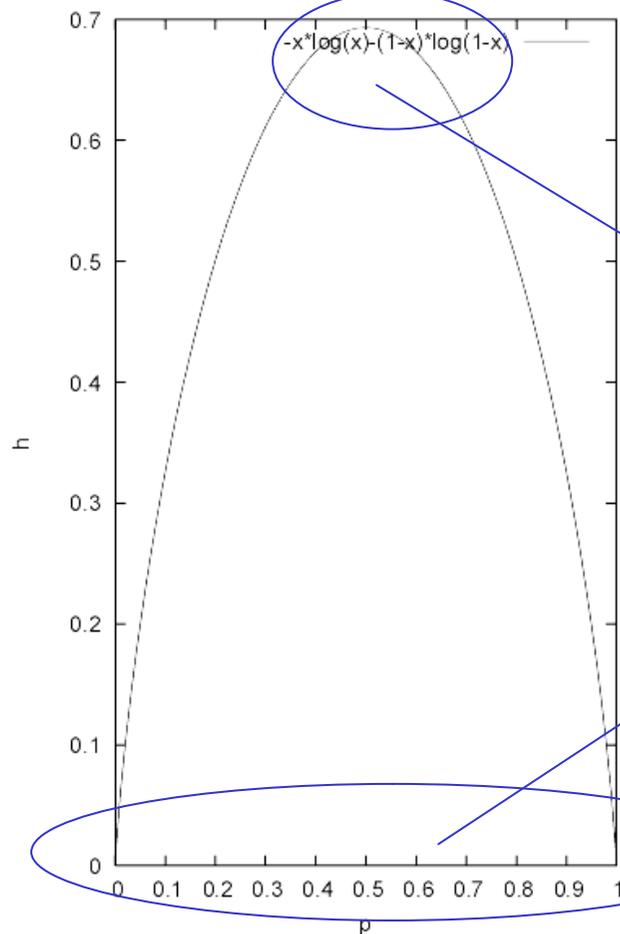


2値エントロピー関数

$P(a) = p, p(b) = 1 - P(a) = 1 - p, A = \{a, b\}$ のときのエントロピーは

$$h(p) = -p \log p - (1 - p) \log(1 - p)$$

2値エントロピー関数

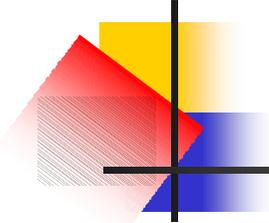


最大値は $h(p = 1/2) = 0.69$

(左図では自然対数でプロットしていることに注意)

$$h(p) \geq 0, h(p = 0) = h(p = 1) = 0$$

2値エントロピー関数を一般化する問題
例題2



複合事象のエントロピー

2つの異なる事象の集合を $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, Y = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ とするとき

$$H(X, Y) = - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} P_{XY}(x, y) \log P_{XY}(x, y)$$

複合事象のエントロピー (結合エントロピー)

(例)

a_1 (晴れ), a_2 (雨), b_1 (気温: 摂氏0 ~ 10度), b_2 (気温: 摂氏10 ~ 20度)

$$H(X, Y) = -P_{XY}(a_1, b_1) \log P_{XY}(a_1, b_1) - P_{XY}(a_1, b_2) \log P_{XY}(a_1, b_2) \\ - P_{XY}(a_2, b_1) \log P_{XY}(a_2, b_1) - P_{XY}(a_2, b_2) \log P_{XY}(a_2, b_2)$$

雨で気温が摂氏10度 ~ 20度である確率

条件付きエントロピー

$X = x$ という条件下での確率変数 Y についてのエントロピー

$$H(Y | X = x) = - \sum_{y \in Y} P_{Y|X}(y | X = x) \log P_{Y|X}(y | X = x)$$

$X = x$ の値に依存するので $P_X(x)$ で平均する

$$H(Y | X) = \sum_{x \in X} P_X(x) H(Y | X = x)$$

$$= - \sum_{x \in X} P_X(x) \sum_{y \in Y} P_{Y|X}(y | X = x) \log P_{Y|X}(y | X = x)$$

$$= - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} P_X(x) P_{Y|X}(y | x) \log P_{Y|X}(y | x)$$

確率に関する積の公式より

$$P_{XY}(x, y)$$

条件付きエントロピー

$$H(Y | X) = - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} P_{XY}(x, y) \log P_{Y|X}(y | x)$$

X が与えられた条件下で、 Y についてのあいまいさを表す