



Title	2005年度 情報理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2005-11-18T09:19:52Z
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/772
Rights(URL)	http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learningobject
Note(URL)	http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html ; http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	InfoTheory05_slide3.pdf (第3回講義スライド)



[Instructions for use](#)



情報理論 #3

第3回講義 5月9日

情報科学研究科 井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

バイアスのかかったコイン投げ

前回の復習

$$A = \{H, T\}, B = \{H, T\}$$

1回目の試行 2回目の試行

$$P_{B|A}(H | H) = P_{B|A}(H | T) = 1$$

$$P_{B|A}(T | H) = P_{B|A}(T | T) = 0$$

2回目には必ず表がでる

$H(A)$: 1回目のコインの向きに関する知識のあいまいさ (エントロピー)

$$H(A) = - \sum_{i=\{H,T\}} P_A(i) \log P_A(i) = \log 2 = 1 \text{ (ビット)}$$

$H(B | A)$: 1回目の向きを知ったとき、2回目のコインの向きに関する知識のあいまいさ

$$H(B | A) = - \sum_{i=\{H,T\}} \sum_{j=\{H,T\}} P_{B|A}(j | i) P_A(i) \log P_{B|A}(j | i) = 0 \quad (\text{演習問題2より})$$

$$H(A | B) = - \sum_{i=\{H,T\}} \sum_{j=\{H,T\}} P_{A|B}(i | j) P_B(j) \log P_{A|B}(i | j) \longrightarrow \text{どうなるか?}$$

ベイズの公式

これらは既知

$$P_{A|B}(i|j) = \frac{P_{B|A}(j|i)P_A(i)}{\sum_{i=\{H,T\}} P_{B|A}(j|i)P_A(i)}$$

ベイズの公式

(証明)

確率に関する積の公式より $P_{A,B}(i,j) = P_{A|B}(i|j)P_B(j) = P_{B|A}(j|i)P_A(i)$

$A \leftrightarrow B, i \leftrightarrow j$ の交換に対して不変である

従って

$$P_{A|B}(i|j) = \frac{P_{B|A}(j|i)P_A(i)}{P_B(j)} = \frac{P_{B|A}(j|i)P_A(i)}{\sum_{i=\{H,T\}} P_{B|A}(j|i)P_A(i)}$$

このコイン投げの問題に対する具体的な適用例は配布資料#3 p. 16 (51)-(54)式を見よ

相互情報量

1回目の試行に関する知識のあいまいさ

エントロピーの差 :

$$H(A) - H(A|B)$$

2回目の試行の結果を知ったときの
1回目の試行に関する知識の
あいまいさ

2回目の試行の結果を知った場合に1回目の試行に
関する知識のあいまいさがどの程度減少したか (知識の増加分)

$$I(A; B) = H(A) - H(A|B)$$

相互情報量

今のコイン投げの例では
 $H(A) = 1, H(A|B) = 1$

$$I(A; B) = 0$$

2回目には必ず表が出るように
仕組みられているので、2回目の
結果を知っても、1回目の試行に
関する知識は増えない

A、Bの交換に対して不変なので

$$I(A; B) = H(B) - H(B|A)$$

とも書ける

例題3

$A = \{a_1, a_2\}$ (a_1 : 晴れ, a_2 : 雨), $B = \{b_1, b_2\}$ (b_1 : 藻岩山に雲なし, b_2 : 藻岩山に雲)

$$P(a_1) = P(a_2) = \frac{1}{2}, P(b_1 | a_1) = \frac{1}{2}, P(b_2 | a_2) = 1$$

晴れ的时候には確率1/2で藻岩山に雲がかかる

雨的时候には確率1で必ず藻岩山には雲がかかる

問題: 相互情報量を求めよ

$$I(A; B) = H(A) - H(A | B)$$

藻岩山に雲がかかっているか、否かを知ったときに明日の天気に関する知識のあいまいさがどの程度減少するのか(知識の増加分)

$$H(A | B) = - \sum_{i=1,2} \sum_{j=1,2} P(a_i | b_j) P(b_j) \log P(a_i | b_j)$$

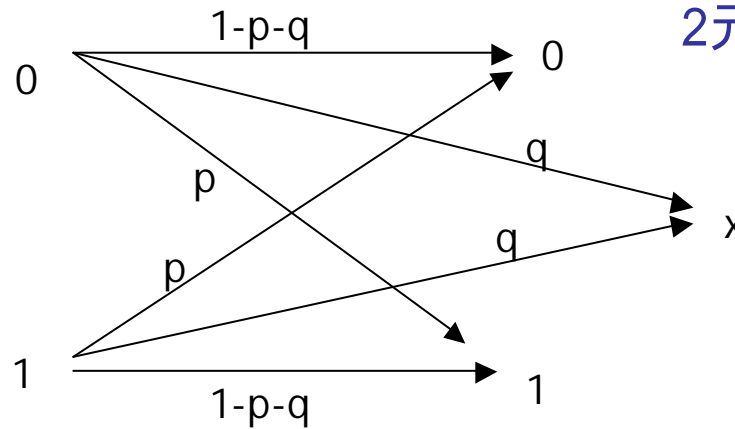
を具体的に計算する

$$I(A; B) = 0.31 \text{ (ビット)}$$

具体的な計算は配布資料p.17-18

例題4 #1

$p_A(0) = p_A(1) = \frac{1}{2}$
 (ランダム入力)



2元対称消失通信路

出力値の確率:

$p_B(0), p_B(1), p_B(x)$

$$p_B(0) = \sum_{k=0,1} p_{B|A}(0|k)p_A(k) = p_{B|A}(0|0)p_A(0) + p_{B|A}(0|1)p_A(1) = \frac{1}{2}(1-q)$$

同様に $p_B(1) = \frac{1}{2}(1-q), p_B(x) = q$

エントロピーは



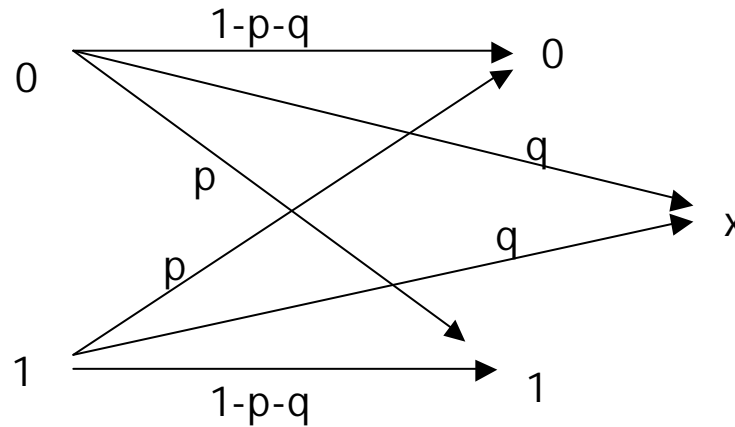
$$H(A) = - \sum_{j=0,1} p_A(j) \log p_A(j) = 1$$

$$H(B) = - \sum_{j=0,1,x} p_B(j) \log p_B(j) = 1 - q - (1-q) \log(1-q) - q \log q$$

例題4 #2

2元対称消失通信路

$p_A(0) = p_A(1) = \frac{1}{2}$
 (ランダム入力)



$$p_B(0) = \frac{1}{2}(1-q)$$

$$p_B(x) = q$$

$$p_B(1) = \frac{1}{2}(1-q)$$

結合エントロピー $H(A, B) = - \sum_{i=0,1,x} \sum_{j=0,1} p_{B|A}(i|j) p_A(j) \log p_{B|A}(i|j) p_A(j)$

$$= 1 - (1-p-q) \log(1-p-q) - p \log p - q \log q$$

条件付きエントロピー

$$H(B|A) = - \sum_{i=0,1,x} \sum_{j=0,1} p_{B|A}(i|j) p_A(j) \log p_{B|A}(i|j) = -(1-p-q) \log(1-p-q) - p \log p - q \log q$$

$$H(A, B) - H(B|A) = H(A)$$

エントロピーのチェイン則



例題4 #3

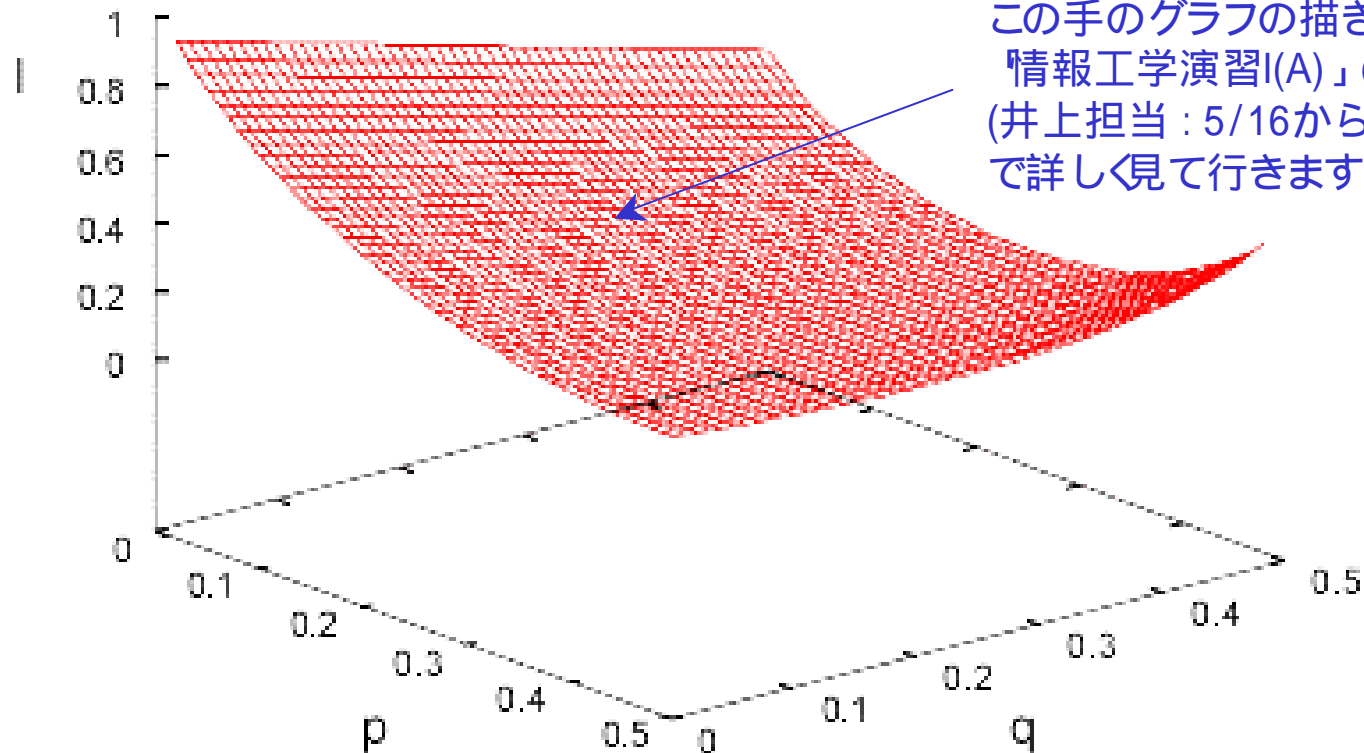
エントロピーのチェイン則 $H(A, B) - H(B | A) = H(A)$ は一般的に示せる

$$\begin{aligned} H(A, B) &= - \sum_{i=0,1,x} \sum_{j=0,1} p_{B|A}(i | j) p_A(j) \log p_{B|A}(i | j) p_A(j) \\ &= H(B | A) - \sum_{i=0,1,x} \sum_{j=0,1} p_{B|A}(i | j) p_A(j) \log p_A(j) \\ &= H(B | A) - \sum_{i=0,1,x} \sum_{j=0,1} p_{A|B}(j | i) p_B(i) \log p_A(j) \\ &= H(B | A) - \sum_{j=0,1} \left\{ \sum_{i=0,1,x} p_{A|B}(j | i) p_B(i) \right\} \log p_A(j) \\ &= H(B | A) + H(A) \end{aligned}$$

例題4 #4

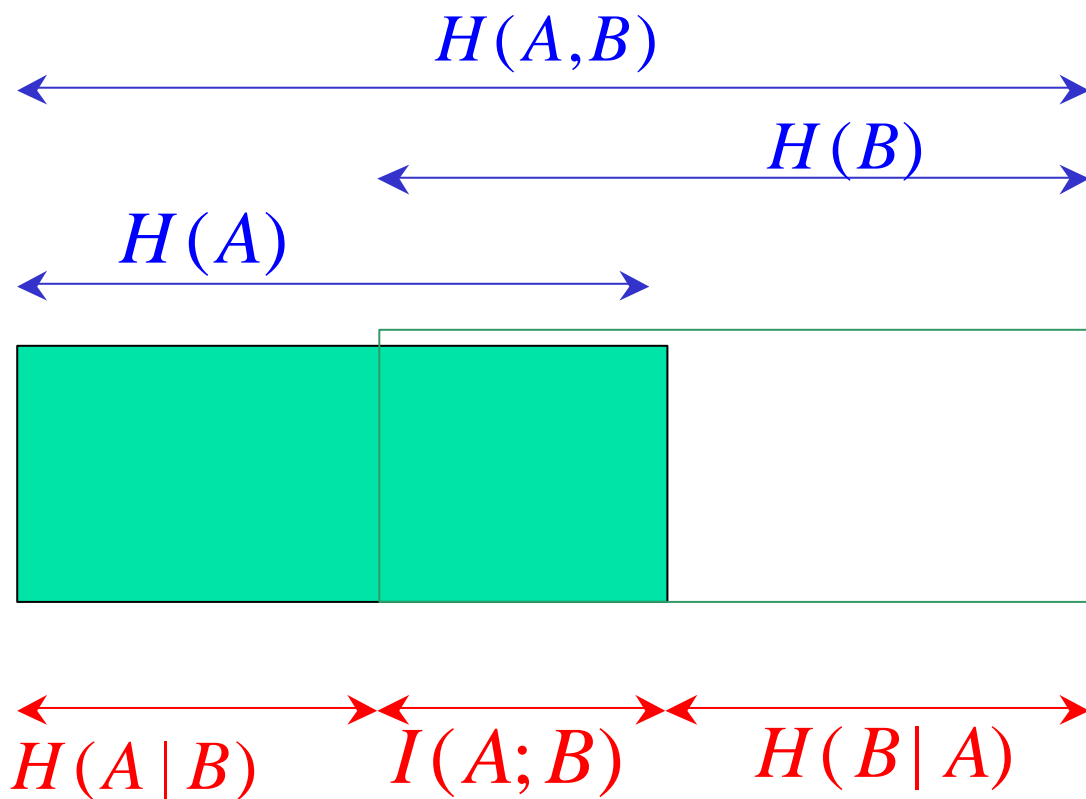
相互情報量

$$I(A;B) = H(A) - H(A|B) = 1 - q + (1 - p - q)\log(1 - p - q) + p \log p - (1 - q)\log(1 - q)$$



この手のグラフの描き方は
「情報工学演習I(A)」(ファイル操作)
(井上担当 : 5/16から3週間)
で詳しく見て行きます

今週のまとめ



各エントロピー、相互情報量の関係