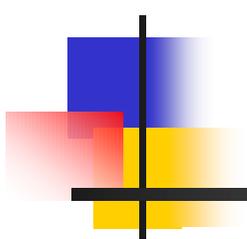




Title	2005年度 情報理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2005-11-18T09:19:52Z
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/772
Rights(URL)	http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learningobject
Note(URL)	http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html ; http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	InfoTheory05_slide7.pdf (第7回講義スライド)



[Instructions for use](#)



情報理論 #7

第7回講義 6月6日

情報科学研究科 井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

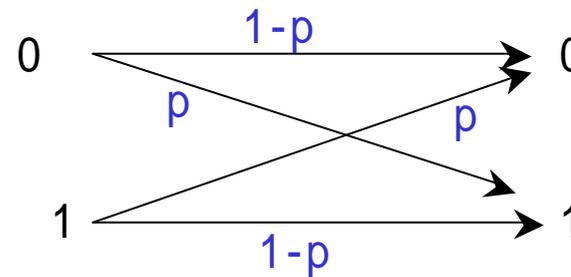
雑音のある状況でのデータ送信

誤り率 p の2元対称通信路

ビット反転率

ただ1度だけでなく 何回か同じ記号を繰り返し送信する

受信者側は**多数決**で送信された記号を確定する



5回送信した場合 : 00101 0, 01111 1 等

送信回数 $n = 5$ のときの誤り確率は

$$\begin{aligned} f_e^{(5)}(p) &= {}_5C_3 p^3 (1-p)^2 + {}_5C_4 p^4 (1-p) + p^5 \\ &= 10p^3 (1-p)^2 + 5p^4 (1-p) + p^5 \end{aligned}$$

3ビットの誤りが5ビットの何番目にくるかという場合の数

誤り確率の繰り返し回数依存性

$$f_e^{(3)}(p) = 3p^2(1-p) + p^3$$

$$f_e^{(5)}(p) = 10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5$$

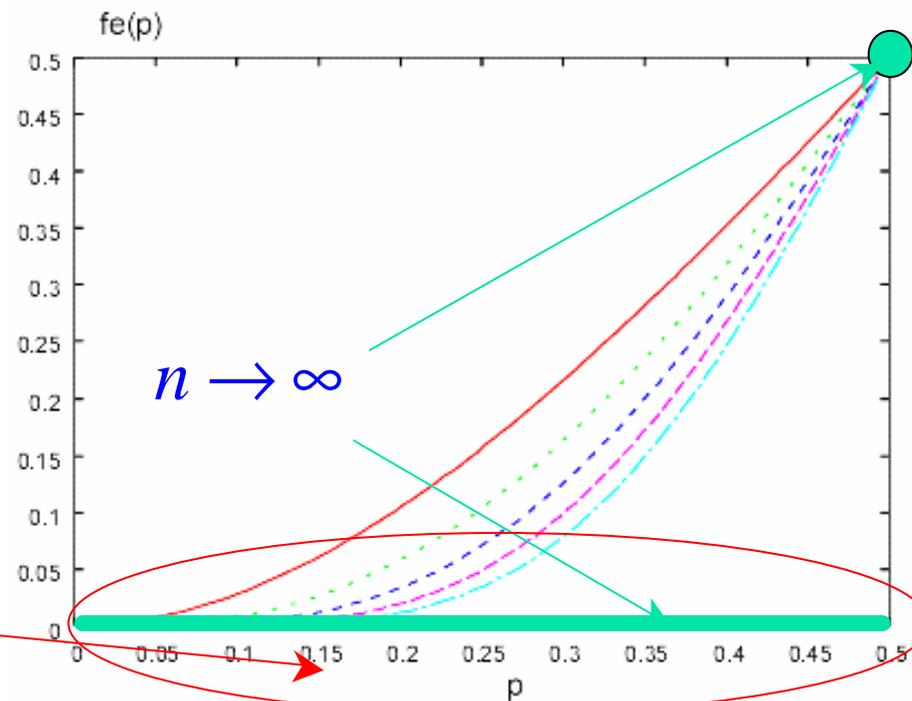
$$f_e^{(7)}(p) = 35p^4(1-p)^3 + 21p^5(1-p)^2 + 7p^6(1-p) + p^7 \quad \text{のように振舞う}$$

$n \rightarrow \infty$ ではどうなるか？

$$f_e^{(\infty)} = \begin{cases} 0 & (0 \leq p < 1/2) \\ \frac{1}{2} & (p = 1/2) \end{cases}$$

導出の詳細は講義ノート参照

送信回数を増やせば、
誤り確率はいくらでもゼロに近づく



通信路容量

$$C = \max_{P_X} I(X; Y)$$

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y | X)$$

通信路容量の定義

X : 入力
 Y : 出力

相互情報量: 入力 X を知ったときに、出力 Y に対して得られる知識の増加分

↓ 入力の確率分布に関して、相互情報量を最大化したものが通信路容量

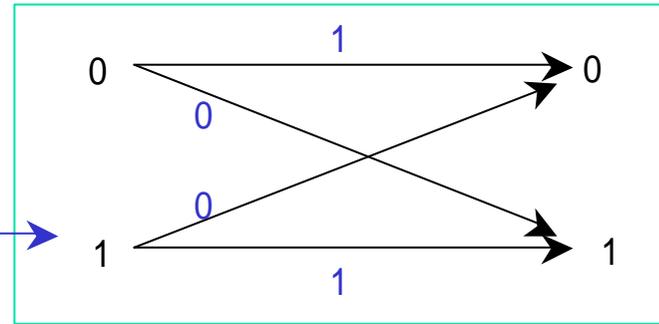
通信路容量は、通信路が伝送できる最大の情報量という意味を持つ

通信路容量の計算例

誤りの無い2元対称通信路

$$P_{Y|X}(0|0) = P_{Y|X}(1|1) = 1$$
$$P_{Y|X}(0|1) = P_{Y|X}(1|0) = 0$$

条件付き確率での表現



グラフ表現

$P_X(0) = p$, $P_X(1) = 1 - p$ のように入力分布をおくと、出力分布は

$$P_Y(0) = \sum_{x=0,1} P_{Y|X}(0|x)P_X(x) = p, \quad P_Y(1) = \sum_{x=0,1} P_{Y|X}(1|x)P_X(x) = 1 - p$$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = h(p)$$

$$= -p \log p - (1-p) \log(1-p)$$

2値エントロピー関数
 $p = 1/2$ で最大値 1をとる

通信路容量は $C = \max_p I(X;Y) = h(1/2) = 1$

多次元入出力-定常無記憶通信路の 相互情報量の上限 と通信路容量の関係#1

$$\underbrace{\mathbf{X} = X_1, X_2, \dots, X_n}_{\text{入力ベクトル}} \in A^n, \quad \underbrace{\mathbf{Y} = Y_1, Y_2, \dots, Y_n}_{\text{出力ベクトル}}$$

出力の同時分布に関し

$$P_Y(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = P(Y_n | Y_{n-1}, \dots, Y_1) P(Y_{n-1}, \dots, Y_1)$$

$$P(Y_{n-1}, \dots, Y_1) = P(Y_{n-1} | Y_{n-2}, \dots, Y_1) P(Y_{n-2}, \dots, Y_1)$$

確率の積の公式

.....

$$P(Y_3, Y_2, Y_1) = P(Y_3 | Y_2, Y_1) P(Y_2, Y_1)$$

$$P(Y_2, Y_1) = P(Y_2 | Y_1) P(Y_1)$$

従って

$$P_Y(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = P(Y_n | Y_{n-1}, \dots, Y_1) P(Y_{n-1} | Y_{n-2}, \dots, Y_1) \cdots P(Y_1)$$

が成り立つ

多次元入出力-定常無記憶通信路の 相互情報量の上限 と通信路容量の関係#2

$$P_Y(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = P(Y_n | Y_{n-1}, \dots, Y_1) P(Y_{n-1} | Y_{n-2}, \dots, Y_1) \cdots P(Y_1) \quad \text{より}$$

$$H(\mathbf{Y}) = - \sum_{Y_1} \cdots \sum_{Y_n} P_Y(Y_1, \dots, Y_n) \log P_Y(Y_1, \dots, Y_n) = \sum_{i=1}^n H(Y_i | Y_1, \dots, Y_i)$$

無記憶な通信路を考えているので

$$P_{Y|X}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n P_{Y|X}(Y_i | X_i)$$

各時刻で誤り方が独立

これを示せというのが、今週の
演習問題の一つ

条件付きエントロピーは

$$\begin{aligned} H(\mathbf{Y} | \mathbf{X}) &= - \sum_{\mathbf{X}} \sum_{\mathbf{Y}} P_{XY}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \log \prod_{i=1}^n P_{Y|X}(Y_i | X_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ - \sum_{\mathbf{X}} \sum_{\mathbf{Y}} P_{XY}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \log P_{Y|X}(Y_i | X_i) \right\} = \sum_{i=1}^n H(Y_i | X_i) \end{aligned}$$

多次元入出力-定常無記憶通信路の 相互情報量の上限 と通信路容量の関係#3

相互情報量は

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^n H(Y_i | Y_1, \dots, Y_n) - \sum_{i=1}^n H(Y_i | X_i)$$

$$H(Y_i | Y_1, \dots, Y_{i-1}) \leq H(Y_i)$$

条件を増やせば
あいまいさは減少する

$$\leq \sum_{i=1}^n H(Y_i) - \sum_{i=1}^n H(Y_i | X_i) = \sum_{i=1}^n I(X_i; Y_i) \leq nC$$

通信路容量の定義

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \leq nC$$

伝送速度と誤り確率

$$R = \frac{\log M}{n} = \frac{1}{n}$$

伝送速度 (レート)

送信記号の種類の数
1, 0ならば 2

繰り返し回数を限りなく多くとると
誤り確率は限りなくゼロに近づくが、
同時に伝送速度もゼロになってしまう

実用的ではない。しかし

$$R < C$$

ならば、限りなく小さな誤り確率での情報伝送が可能

詳細は次回

