



Title	2005年度 情報理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2005-11-18T09:19:52Z
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/772">http://hdl.handle.net/2115/772</a>
Rights(URL)	<a href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learningobject
Note(URL)	<a href="http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html">http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html</a> ; <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	InfoTheory05_slide9.pdf (第9回講義スライド)



[Instructions for use](#)



# 情報理論 #9

第9回講義 6月20日

---

情報科学研究科 井上純一

[http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/)

# 2進線形符号

次の2つの条件を満たす $\{0,1\}^n$ の線形部分空間 $C$ を2進線形符号と呼ぶ

$$(1) \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C \text{ ならば } \mathbf{x} + \mathbf{y} \in C$$

$$(2) l \in \{0,1\}, \mathbf{x} \in C \text{ ならば } l\mathbf{x} \in C$$

$$C = \{u_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + u_k \mathbf{x}_k \mid u_i \in \{0,1\}, i = 1, \dots, k\}$$
$$= \{\mathbf{u}G \mid \mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_k\} \in \{0,1\}^k\}$$

線形独立な基底ベクトル

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{x}_k \end{pmatrix}$$

生成行列:  $n \times k$ のサイズをもつ

# 2進線形符号の例

$$C = \left\{ \begin{array}{l} (00000), (01100), (00110), (01010) \\ (11111), (10011), (11001), (10101) \end{array} \right\}$$

どの元同士の和もCに属している。その定数(0,1)倍もCに属している

基底ベクトルとして(01100),(00110),(11111)をとる

生成行列

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 01100 \\ 00110 \\ 11111 \end{pmatrix}$$

基本変形を  
行うと

$$G^* = \begin{pmatrix} 10011 \\ 01010 \\ 00110 \end{pmatrix} = (I_3 : G_1)$$

# パリティ検査行列

2進線形符号のパリティ検査行列Hを用いた書き換え

$$C = \{ \mathbf{x} \in \{0,1\}^n \mid H\mathbf{x}' = \mathbf{0}' \}$$

(注)文字の右肩のプライムは転置を表す

$rank(H) = n - k$ ,  $(n - k) \times n$ の行列

$\mathbf{x}_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) に対しても  $H\mathbf{x}'_i = \mathbf{0}'$  が成り立つので

$$GH' = 0$$

パリティ検査行列Hも基本変形により  $H^*$  に書き換えると

$$G^* H^{*'} = (I_k : G_1) \begin{pmatrix} G_1 \\ I_{n-k} \end{pmatrix} = I_k G_1 + G_1 I_{n-k} = G_1 + G_1 = 0$$

# 行列Hで2進線形符号を表す

$$G^* = \begin{pmatrix} 10011 \\ 01010 \\ 00110 \end{pmatrix}, \quad H^* = \begin{pmatrix} 11110 \\ 10001 \end{pmatrix}$$

すると確かに  $G^* H^{*'} = \begin{pmatrix} 10011 \\ 01010 \\ 00110 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00 \\ 00 \\ 00 \end{pmatrix} = 0$

$I_{n-k} = I_{5-3} = I_2$

$$H^* \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 11110 \\ 10001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_4 = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_5 = x_1 \end{cases}$$

$x_4, x_5$  は  $x_1, x_2, x_3$  で決まる

$$(x_1, x_2, x_3) = (000)(001)(010)(011)(101)(110)(111)$$

と選ぶと

$$(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) = C$$

$$C = \left\{ \begin{array}{l} (00000), (01100), (00110), (01010) \\ (11111), (10011), (11001), (10101) \end{array} \right\}$$



# パリティ検査行列と最小距離

$$H = \begin{pmatrix} 11011 \\ 01110 \\ 10110 \end{pmatrix} \text{ に対し、 } H'\mathbf{x}' = 0 \text{ は}$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$C$ の最小重み(最小距離)は  $w(\mathbf{x}) = 3$ であり、 $\mathbf{x} = (11100)$

線形符号のパリティ検査行列  $H = (\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_m)$  のどの  $t$  個の列ベクトルも線形独立で、 $t+1$  個の列ベクトルが線形従属のとき、 $C$  の最小距離は  $d = t+1$

**これを証明せよというのが今週の演習問題**

# 2進線形符号の符号化

パリティ検査行列:  $H = \begin{pmatrix} 10100 \\ 11010 \\ 01001 \end{pmatrix}$ ,  $C = \{\mathbf{x} \in \{0,1\}^5 \mid H\mathbf{x}' = \mathbf{0}'\}$  に対し、 $H\mathbf{x}' = \mathbf{0}'$  を書き出すと

パリティ検査  
ビット

$$\begin{aligned} x_3 &= x_1 \\ x_4 &= x_1 + x_2 \\ x_5 &= x_2 \end{aligned}$$

情報ビット

情報ビットを決めると、パリティ検査ビットが定まる

$(x_1, x_2) = (00)(01)(10)(11)$  とすると

$(x_3, x_4, x_5) = (000)(011)(110)(101)$  となるので

$$C = \{(00000), (01011), (10110), (11101)\}$$

できあがる2進線形符号



# 2進線形符号の復号化

受信データ 送信データ

$$\boxed{y} = \boxed{x} + \boxed{e} \text{ 雑音}$$

この両辺左からパリティ検査行列をかけると

$$Hy' = \boxed{Hx'} + He' = \boxed{He'} \text{ シンドローム}$$

パリティ検査行列の定義からゼロ

線形符号の復号化法

$Hy'$ を計算し、この値を与えるコセットリーダー $e$ をに加える

具体例は講義ノート例題9で見ていく