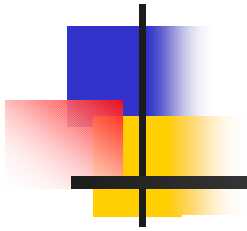


情報理論　#13　最終回）

第13回講義　7月25日

情報科学研究科　　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

ガロア体

集合Fが体をなす条件

(1) **集合F上に加法・乗法が定義されている**

(2) **集合Fに単位元が存在する（加法の単位元を0, 乗法の単位元を1)**

(3) **集合Fの任意の要素 a に対して、$a+b=0$ を満たす加法の逆元**
$b=-a$, $a\cdot c=1$ **を満たす乗法の逆元** $c=a^{-1}$ **が存在する**

有限個の要素からなる体　：　**ガロア体**

$$GF(p)$$

集合の要素数：位数

例）

$F=\{0,1\}$**とし、2を法とする加算を加法としたものが**$GF(2)$

フェルマーの小定理

$GF(p)$ の 0 以外の要素を $Z_p^* = \{1,2,\ldots, p-1\}$ とする

Z_p^* の異なる要素 b, c に対して

$ba = ca \pmod{p}$ となる $a \in Z_p^*$ は存在しない。

(証明は両辺から a^{-1} をかけて見よ)

$\Rightarrow Z_p^*$ の各要素に a をかけたものは全て異なり、Z_p^* はこれで尽くされる。

また、次の関係式が成り立つ

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1) = a\cdot(2a)\cdot(3a)\cdots(p-1)a \pmod{p}$$
$$= a^{p-1}\{1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1)\} \pmod{p}$$

任意の素数を p とする。p の倍数でない任意の整数 a に対して

$$a^{p-1} = 1 \pmod{p}$$

が成り立つ。

フェルマーの小定理　例）

フェルマーの小定理をp=7 の場合に確かめてみる

$a^j \pmod{p}$を計算する

a \ j	1	2	3	4	5	6
2	2	4	1	2	4	1
3	3	2	6	4	5	1
4	4	2	1	4	2	1
5	5	4	6	2	3	1
6	6	1	6	1	6	1

確かに

$a^{7-1} = a^6 = 1 \pmod{7}$

を満たしている

$j = p - 1 = 7 - 1 = 6$

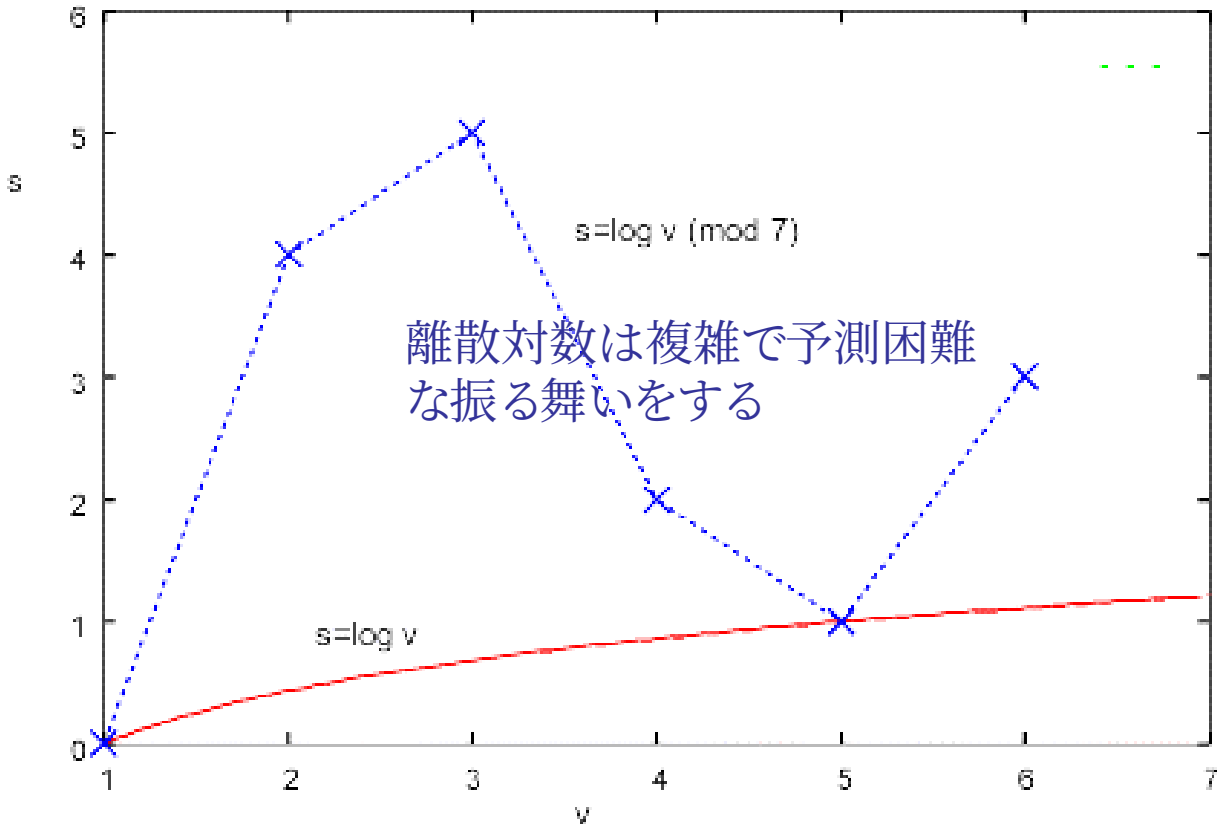
で初めて$a^j = 1 \pmod{p}$となっている

a は$GF(p)$の**原始元**であるという

離散対数問題と一方向性関数

$$s = \log_a v \pmod{p}$$

をGF(p)上のaを底とする**離散対数**と呼ぶ



$$a^s = v \pmod{p}$$

が解sを満たすことを
「確認すること」は容易であるが
解sを見つけることは
多くの場合にとても難しい

⇒ **離散対数問題**

$$f(x) = a^x \pmod{p}$$ 容易

$$f^{-1}(x) = \log_a x \pmod{p}$$ 難しい

f(x)は**一方向性関数**と呼ばれる

公開鍵暗号：エルガマル暗号

古典暗号：秘密鍵を用いて通信内容が他人に漏れないようにする暗号
公開鍵暗号：公開鍵を利用する暗号

離散対数問題の困難性をその安全性の根拠に置く

エルガマル（ElGamal）暗号系

ユーザ	アリス	ボブ
秘密鍵	a	a_1
公開鍵	p, a, b	p_1, a_1, b_1

$b = a^{a} \pmod{p}$

$b_1 = a_1^{a_1} \pmod{p_1}$

を満たすとする

エルガマル暗号の暗号化

エルマガル暗号の暗号手続き

(1) **適当な乱数で整数を作り、それを** k **とする**

(2) **送信相手の公開鍵 :** p, a, b **に対し、平文** x **を** $1 \le x \le p-1$**として**

$$c_1 = a^k \pmod{p}$$

$$c_2 = x b^k \pmod{p}$$

(3) **暗号文** $c = (c_1, c_2)$ **を送信する**

この暗号文からは乱数k、平文xに関して何もわからないことに注意
外からは既に見えなくなっている)

エルガマル暗号の復号化

エルマガル暗号の復号化手続き

(1) **受信文を**$c=(c_1,c_2)$**とする**

(2) **秘密鍵** a **を用いて**

$$\left(c_1^{a}\right)^{-1}\cdot c_2 \pmod{p}$$

を計算すると、平文 x **が得られる**

確認）

$$\left(c_1^{a}\right)^{-1}\cdot c_2=\left(\left(a^{k}\right)^{a}\right)^{-1}\cdot xb^{k} \pmod{p}$$

$$=\left(a^{ak}\right)^{-1}\cdot x\cdot a^{ak} \pmod{p}$$

$$=x \pmod{p}$$

秘密鍵aを知らずに復号することは離散対数問題を解くことに相当し、非常に難しいことになる